

Nichtkommutative Polynomerweiterungen

von
Bernhard Hain
aus
Sonneberg

1972



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548611_0049

Nichtkommutative Polynomerweiterungen

von
Dr. phil. habil. Gert-Martin Ziegler

Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
der Universität Bonn

Springer
Verlag
Berlin Heidelberg

1989

Nichtkommutative Polynomerweiterungen

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt

von

Bernhard Hain

aus

Sonneberg

Als Dissertation genehmigt von der
Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung: 10. Mai 1972

Dekan: Prof. Dr. K. Jacobs
Erstberichterstatter: Prof. Dr. W. Specht
Zweitberichterstatter: Prof. Dr. H. Heineken

E i n l e i t u n g

In der Theorie der nichtkommutativen Ringe sind mehrere Typen nichtkommutativer Polynomringe bekannt. Man vergleiche dazu: Jacobson [6], Amitsur [12], P.M. Cohn [4], Noether-Schmeidler [9], Ore [10] und F. Schwarz [11].

Diese Polynomringe sind alle durch Angabe einer Konstruktion definiert. In der vorliegenden Arbeit wird im Gegensatz dazu ein anderer Weg eingeschlagen, nichtkommutative Polynomringe zu definieren. Eine Erweiterung eines Ringes R wird Polynom-erweiterung genannt, wenn sie eine universelle Abbildungs-eigenschaft für gewisse Klassen von Erweiterungen hat. Dies ist eine konsequente Übertragung einer die kommutativen Polynomringe in n Unbestimmten charakterisierenden Eigen-schaft, nämlich der universellen Abbildungseigenschaft für die von n Elementen erzeugten kommutativen Erweiterungen eines kommutativen Ringes mit Eins. Die universelle Abbil-dungseigenschaft des kommutativen Polynomrings $R[X_1, \dots, X_n]$ lautet: Jeder von n Elementen erzeugte Erweiterungsring $R[x_1, \dots, x_n]$ ist homomorphes Bild des Ringes $R[X_1, \dots, X_n]$ unter einem Ringhomomorphismus, der auf R die Identität ist und der für $v = 1, 2, \dots, n$ die X_v auf die x_v abbildet.

Die Definitionen der in dieser Arbeit behandelten Klassen nichtkommutativer Erweiterungen eines gegebenen Rings wird in §0 durchgeführt. Sämtliche Definitionen und Sätze sind jedoch nur für Algebren über einem kommutativen Ring mit

Eins formuliert, da jeder Ring auf natürliche Weise eine Algebra über dem Ring der ganzen Zahlen ist, und somit Sätze und Definitionen über Algebren unmittelbar auf Ringe anwendbar sind.

Durch das oben geschilderte Verfahren Polynomringe durch eine Eigenschaft zu definieren, entsteht einerseits das Problem, die Existenz von Polynom Erweiterungen nachzuweisen. Die Lösung dieses "Problems der universellen Abbildungseigenschaft" wird in §1 durchgeführt. Dabei zeigt sich, daß die Existenz einer Lösung im wesentlichen nur für eine Klasse von Erweiterungen bewiesen werden muß. Die übrigen ergeben sich durch geeignete Spezialisierung.

Andererseits erreichen wir durch dieses Vorgehen:

- 1) Eine Klassifikation der uns bekannten Polynom Erweiterungen. Man vergleiche dazu die Liste auf Seite 60
- 2) Eine Übertragung von Sätzen der kommutativen Theorie der Polynomringe auf den nichtkommutativen Fall. Es gelingt nämlich für alle hier behandelten nichtkommutativen Polynom Erweiterungen eine Graduierung zu konstruieren, die den Konstanten den Grad Null und den Unbestimmten den Grad Eins gibt. Weiter können Derivationen angegeben werden, die auf den Konstanten verschwinden und den Unbestimmten als Ableitung die Eins zuordnen, und schließlich kann ein Analogon zum Ring der formalen Potenzreihen erklärt werden.

- 3) Ausgehend von einem kommutativen Ring erhalten wir für die Klasse der unitären Erweiterungen, die das Zentrum respektieren, eine Polynomerweiterung, die sogar isomorph ist zum kommutativen Polynomring; Überdies ist der nichtkommutativ erklärte Grad unter dieser Isomorphie identisch mit dem üblichen homogenen Grad eines Polynoms und die nichtkommutativ erklärten Derivationen sind identisch mit den im kommutativen Fall bekannten partiellen Ableitungen. Weiter ist der nichtkommutativ erklärte Ring der formalen Potenzreihen identisch mit dem für kommutative Ringe üblichen Ring der formalen Potenzreihen (siehe §5).
- 4) Der Ring der in [5] erklärten polynomialen Abbildungen einer endlichdimensionalen reellen Algebra in sich ist homomorphes Bild der Polynomerweiterung $A_S[X]$, aber nicht homomorphes Bild irgendeines der bekannten Polynomringe. (Siehe §6.7)

Die Existenz von Graduierungen auf den nichtkommutativen Polynomerweiterungen wird in §2 nachgewiesen, die Existenz von Derivationen im §4. In beiden Fällen stellt sich heraus, daß der Beweis im wesentlichen nur für die zur Klasse $C_0(I, A)$ von Erweiterungen gehörige Polynomerweiterung geführt werden muß, da die zu den Spezialisierungen gehörigen Relationen **ideale** differentiell, und bezüglich der in §2 eingeführten Graduierung homogen sind.

Der §3 beschäftigt sich mit nichtkommutativen formalen Potenzreihenringen. Es zeigt sich, daß - wie in der kommutativen Theorie - eine algebraische Definition und eine topologische Definition formaler Potenzreihen äquivalent sind. Um diese Äquivalenz zu beweisen, wird ein wesentlich allgemeinerer und sogar verallgemeinerungsfähiger Satz (3.4) bewiesen.

Im Anhang wird die in [9] ohne Beweis formulierte Aussage, daß der nichtkommutative Polynomring $A_1[X_1, \dots, X_n]$ in n Variablen über einem Körper ein Integritätsring ist, untersucht. Es gelingt, unter Benutzung eines Darstellungssatzes für $A_1[X]$, die Nullteilerfreiheit von $A_1[X]$ sogar für beliebige nicht notwendig kommutative Integritätsringe A zu beweisen. An Hand eines Beispiels wird gezeigt, daß diese Aussage falsch werden kann, wenn der Integritätsring nicht als Algebra über dem Ring der ganzen Zahlen (der ein Hauptidealring ist) sondern als Algebra über anderen Teilringen angesehen wird.

Für wertvolle Diskussionen und Hinweise möchte ich den Herren Dr. W. Specht, Dr. H. Heineken, Dr. B. Pareigis und Dr. W.D. Geyer herzlichst danken.

§ 0. Vorbereitungen

Sämtliche im folgenden gegebenen Definitionen und Sätze sind nur für Algebren formuliert, da jeder Ring in kanonischer Weise eine Algebra über dem Ring der ganzen Zahlen ist.

Wir erinnern zunächst an die folgenden Definitionen:

Ein Tripel $A = (A_+, \beta, R)$ heißt R-Algebra (oder kurz Algebra), wenn

- 1) R ein kommutativer Ring mit Eins ist,
- 2) A_+ ein unitärer R -Modul, und
- 3) $\beta: A_+ \times A_+ \longrightarrow A_+$ eine bilineare Abbildung,
- 4) für die mit der Abkürzung $xy := \beta(x, y)$ das Assoziativgesetz $x(yz) = (xy)z$ gilt.

Die Addition des R -Moduls A_+ und die Verknüpfung β definieren auf A_+ eine Ringstruktur. Den zugehörigen Ring bezeichnen wir mit $r(A)$.

Ein Algebren-Homomorphismus $f: A \longrightarrow B$ ist eine R -lineare Abbildung von A_+ in B_+ , die gleichzeitig ein Ring-Homomorphismus von $r(A)$ in $r(B)$ ist.

Eine Algebra A' heißt Erweiterung der Algebra A , wenn ein Monomorphismus $\epsilon: A \longrightarrow A'$ gegeben ist.

Sei A eine Algebra mit Einselement 1_A . Eine Erweiterung A' von A mit Einselement $1_{A'}$ heißt unitär, wenn $1_A = 1_{A'}$ ist.

Wir bemerken, daß eine Erweiterung A' einer Algebra A mit Eins genau dann unitär ist, wenn A' als A -Linksmodul und als A -Rechtsmodul unitär ist.

Für Algebren mit Eins verstehen wir unter Algebren-Homomorphismen nur solche, die Eins in Eins überführen.

Bezeichnung: Sei A' eine Erweiterung einer R -Algebra A , I eine (Index-) Menge, und $x:I \longrightarrow A'$ eine Abbildung von I in A' , also $(x_i)_{i \in I}$ eine Familie von Elementen von A' . Dann definieren wir eine Erweiterungs-Algebra von A mit ausgezeichneten Erzeugern $(x_i)_{i \in I}$ als das Paar $\langle A, x, I \rangle$, bestehend aus der von der Menge $\{A \cup_{i \in I} x_i\}$ in A' erzeugten Teilalgebra, und der Familie $(x_i)_{i \in I}$.

Das Erzeugnis von $\{A \cup_{i \in I} x_i\}$ bezeichnen wir mit $\langle \underline{A, x, I} \rangle$.

Eine Erweiterung A' von A heißt zentriert, wenn das Zentrum $Z(A)$ im Zentrum von A' enthalten ist.

Wir bemerken, daß eine Erweiterung $\langle \underline{A, x, I} \rangle$ genau dann zentriert ist, wenn für alle $i \in I$ und alle $z \in Z(A)$ die Gleichung $zx_i = x_i z$ gilt.

Sei A eine Algebra mit Eins. Die dem Paar $\langle A, x, I \rangle$ zugrunde liegende Algebra $\langle A, x, I \rangle$ heißt I -kommutierende Erweiterung von A , wenn für alle $i \in I$ und alle $a \in A$ die Gleichung $ax_i = x_i a$ gilt, und $\langle \underline{A, x, I} \rangle$ eine unitäre Erweiterung ist.

Es sei bemerkt, daß die Eigenschaft I -kommutierende Erweiterung keine Eigenschaft der Erweiterungs-Algebra $\langle \underline{A, x, I} \rangle$ ist, sondern eine des Paares $\langle A, x, I \rangle$. Ein

Beispiel für eine I-kommutierende Erweiterung ist der bei Jacobson ([6], Seite 12) definierte Polynomring; er ist I-kommutierend für die Erzeugende λ , aber nicht I-kommutierend für die Erzeugende $(r + \lambda)$, wenn r nicht dem Zentrum des Koeffizientenringes R angehört.

Wir sind nun in der Lage, die in der vorliegenden Arbeit zu behandelnden Kategorien von Erweiterungs-Algebren einer festen R -Algebra A zu definieren.

Definition 0.1: Ist A eine R -Algebra, so bezeichnen wir mit

$K_0(A)$ die Klasse aller Erweiterungen von A ,

$K_1(A)$ die Klasse der unitären Erweiterungen von A ,

$K_c(A)$ die Klasse der zentrierten Erweiterungen von A ,

$K_s(A)$ die Klasse der unitären, zentrierten Erweiterungen der Algebra A , und mit

$K_k(A)$ die Klasse der I-kommutierenden Erweiterungen.

Bei der Definition von $K_1(A)$, $K_s(A)$ und $K_k(A)$ ist, ohne daß dies explizit erwähnt wird, die R -Algebra A eine Algebra mit Einselement.

Sei weiter A eine beliebige, aber feste R -Algebra und I eine Menge. Dann definieren wir:

$C_v(A, I) :=$ Kategorie der Paare $\langle A, x, I \rangle$, wobei die Algebra $\langle \underline{A}, \underline{x}, \underline{I} \rangle$ zu der Klasse $K_v(A)$ gehört;
 $v = 0, 1, c, s, k$.

$C_v^k(A, I) :=$ Kategorie der Paare $\langle A, x, I \rangle$, wobei die Algebra $\langle \underline{A}, \underline{x}, \underline{I} \rangle$ zu der Klasse $K_v(A)$ gehört, und die Erzeugenden $(x_i)_{i \in I}$ paarweise kommutieren;
 $v = 0, 1, c, s, k$.

Die Morphismen seien in allen Fällen die Algebren-Homomorphismen $f: \langle A, x, I \rangle \longrightarrow \langle A, y, I \rangle$ mit $f(a) = a$ für alle $a \in A$ und $f(x_i) = y_i$ für alle $i \in I$. Durch diese Definition der Morphismen erreichen wir, daß zwischen je zwei Objekten der oben genannten Kategorien höchstens ein Morphismus existiert. Eine Kategorie mit dieser Eigenschaft heißt eine geordnete Klasse.

Definition 0.2: Ein Objekt U einer geordneten Klasse heißt universell, wenn für jedes Objekt X der geordneten Klasse die Menge $\text{Hom}(U, X)$ nicht leer ist.

Eine triviale, aber wichtige Folgerung aus dieser Definition ist der

Satz 0.3: In einer geordneten Klasse sind je zwei universelle Objekte isomorph.

Der Satz 0.3 sagt nicht, daß in einer geordneten Klasse universelle Objekte tatsächlich existieren. Wir werden jedoch in § 1. für jede der Kategorien $C_v(A, I)$ und $C_v^k(A, I)$ ($v = 0, 1, c, s, k$) die Existenz eines universellen Objekts nachweisen. Die zu den Kategorien $C_0(A, I)$, $C_1(A, I)$, $C_c(A, I)$ und $C_k(A, I)$ gehörigen universellen Objekte nennen wir beziehentlich: generische, unitäre, zentrierte, unitär-zentrierte und I -kommutierende Polynomerweiterung von A oder Polynom-Algebra über A . Entsprechend nennen wir die universellen Objekte der Kategorien $C_v^k(A, I)$ für $v = 0, 1, c, s, k$ k -generische, k -unitäre, Polynom-Algebra über A .

Im Hinblick auf die folgenden Paragraphen notieren wir noch folgende Definitionen und Resultate:

Sei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Eine Algebra A heißt graduirt, wenn A_+ direkte Summe einer Familie $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Untermoduln ist, derart daß für alle $n, m \in \mathbb{N}$ die Inklusion $A_n A_m \subset A_{n+m}$ besteht.

Ein Element a von A heißt homogen (in Bezug auf die Graduierung $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$), wenn a Element eines der Untermoduln A_n ist. Da A_+ direkte Summe der Untermoduln A_n ist, kann jedes Element von A_+ eindeutig als Summe von homogenen Elementen geschrieben werden; die Summanden einer solchen Darstellung eines Elements heißen seine homogenen Komponenten.

Ein Ideal m einer graduirten Algebra A heißt homogen, wenn m mit jedem Element auch dessen homogene Komponenten enthält. Ein homogenes Ideal m läßt sich daher als eine direkte Summe einer Familie $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Untermoduln von A_+ darstellen, so daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $m_n \subset A_n$ und $m = \bigoplus m_n$. Weiter gilt

Satz 0.4: Ein Ideal einer graduirten Algebra ist homogen genau dann, wenn es von homogenen Elementen erzeugt wird. ¹⁾

Satz 0.5: Sei A eine graduirte Algebra und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ihre Graduierung. m ein homogenes Ideal und $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seine Zerlegung in homogene Komponenten. Dann ist A/m eine graduirte Algebra mit $(A_n/m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als Graduierung. ²⁾

1) Chevalley [3], Seite 150

2) Chevalley [3], Seite 126 und 150

Sei M ein R -Modul, T_0 eine R -Algebra und T eine R -Algebra mit Eins. Weiter seien gegeben R -lineare Abbildungen

$$i_0: M \longrightarrow T_0 \quad \text{und} \quad i: M \longrightarrow T$$

T_0 heißt Tensoralgebra über M , wenn für jede R -lineare Abbildung $f: M \longrightarrow B$ in eine R -Algebra B genau ein Algebren-Homomorphismus $F: T_0 \longrightarrow B$ existiert, so daß $F i_0 = f$ ist.

T heißt Tensoralgebra mit Eins über M , wenn für jede R -lineare Abbildung $f: M \longrightarrow B$ in eine R -Algebra B mit Eins genau ein Algebren-Homomorphismus $F: T \longrightarrow B$ existiert, so daß $F i = f$ ist.

Nach Chevalley [3], S. 151 - 153 gilt:

$T_0(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (\bigotimes^n M)$ ist eine Tensoralgebra über dem Modul M , und

$T(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (\bigotimes^n M)$ ist eine Tensoralgebra mit Eins über dem Modul M ;

dabei sind i_0 und i die natürlichen Inklusionen $M \longrightarrow \bigotimes^1 M$ des Moduls M in $T_0(M)$ bzw. $T(M)$, und es ist $\bigotimes^0 M := R$. Das Produkt zweier Elemente von $T_0(M)$ bzw. $T(M)$ ist als deren Tensorprodukt erklärt.

Eine Derivation D auf einer R -Algebra A ist eine R -lineare Abbildung von A in sich, die folgender Bedingung genügt: Für alle $x, y, e \in A$ ist

$$D(xy) = D(x)y + xD(y).$$

Ein Ideal m einer R -Algebra A mit Derivation D heißt differentiell, wenn $Dm \subset m$ gilt.

Man beweist mühelos den

Satz 0.6: Ein Ideal m einer R -Algebra mit Derivation D ist differentiell genau dann, wenn für ein Erzeugendensystem $(m_i)_{i \in I}$ von m gilt: $Dm_i \in m$.

Die Nützlichkeit des Begriffs differentielles Ideal wird deutlich durch den

Satz 0.7: Sei A eine R -Algebra mit Derivation D und m ein differentielles Ideal. Dann existiert auf der Restklassen-Algebra A/m eine Derivation D' , so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{D} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/m & \xrightarrow{D'} & A/m \end{array}$$

kommutativ wird.

§ 1. Existenz universeller Objekte in den Kategorien $C_{\vee}(A, I)$ und $C_{\vee}^C(A, I)$.

Wir weisen zunächst nur die Existenz eines universellen Objektes in der Kategorie $C_0(A, I)$ nach. Die Existenz universeller Objekte in den übrigen Kategorien wird sich dann in natürlicher Weise ergeben.

Satz 1.1: Die Kategorie $C_0(A, I)$ besitzt ein universelles Objekt.

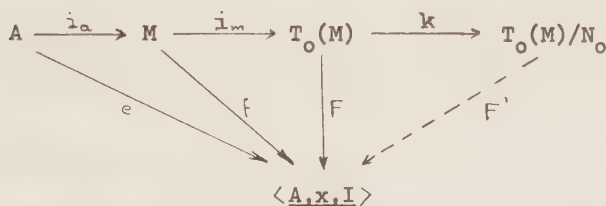
Beweis: a) Einführung der Bezeichnungen für das unten folgende Diagramm: Sei $\langle A, x, I \rangle$ ein Objekt aus $C_0(A, I)$. Dann setzen wir

$$\begin{aligned} e &= \text{Einbettung von } A \text{ in } \langle \underline{A}, x, I \rangle \\ F_I &= \text{Freier } R\text{-Modul mit Basis } (X'_i)_{i \in I} \\ M &= A_+ \oplus F_I \\ i_a &= \text{Einbettung von } A_+ \text{ in } M \\ i_m &= \text{Einbettung von } M \text{ in } T_0(M) \\ i &= i_m \circ i_a \\ M' &= e(A_+) \oplus \sum_I R x_i \subset \langle \underline{A}, x, I \rangle_+ \end{aligned}$$

Da F_I ein freier Modul mit Basis $(X'_i)_{i \in I}$ ist, gibt es eine eindeutig bestimmte R -lineare Abbildung f_0 von F_I auf $\sum R x_i$, so daß für alle $i \in I$ $f_0(X'_i) = x_i$ gilt; da M direkte Summe von A_+ und F_I ist, gibt es eine eindeutig bestimmte Fortsetzung f von f_0 auf M , die auf A_+ die Identität ist ($f i_a = e$) und auf F_I mit f_0 übereinstimmt.

- F = Fortsetzung von f auf $T_0(M)$,
 N_0 = Das von der Menge $\{i(ab) - i(a) \otimes i(b) : a, b \in A\}$
 in der Algebra $T_0(M)$ erzeugte Ideal,
 k = der kanonische Restklassen-Homomorphismus
 von $T_0(M)$ auf $T_0(M)/N_0$. (Multiplikation
 in $T_0(M)/N_0$ sei " $\square$ "),
 $E = ki$

Wir erhalten ein kommutatives Diagramm



b) Dazu haben wir noch F' als induzierte Abbildung zu definieren. Die Definition von F' und die der übrigen Abbildungen liefert die Kommutativität des Diagramms.

Es gilt: $N_0 \subset \text{kern} F$, denn es ist

$$F(i(ab) - i(a) \otimes i(b)) = Fi(ab) - Fi(a)Fi(b) = e(ab) - e(a)e(b) = 0$$

Daher existiert genau ein Algebren-Homomorphismus

$$F': T_0(M)/N_0 \longrightarrow \langle \underline{A, X, I} \rangle \text{ mit } F = F'k$$

$E = ki$ ist ein Algebren-Homomorphismus von A in $T_0(M)/N_0$,
 denn es gilt für alle $a, b \in A$:

$$E(ab) = ki(ab) = \overline{i(ab)} = \overline{i(a) \otimes i(b)} = \overline{i(a)} \square \overline{i(b)} = E(a) \square E(b)$$

E ist ein Monomorphismus. Man wähle etwa $\langle \underline{A}, \underline{X}, \underline{I} \rangle = A$ und alle $x_1 = 0$. Dann ist e monomorph und daher auch E wegen der Kommutativität des Diagramms.

$T_0(M)/N_0$ ist ein Objekt der Kategorie $C_0(A, I)$, wenn wir $X_1 = E(X'_1)$ setzen; denn dann ist $T_0(M)/N_0 = \langle \underline{E(A)}, \underline{X}, \underline{I} \rangle$.

Wir haben damit erhalten: $T_0(M)/N_0$ ist ein universelles Objekt in der Kategorie $C_0(A, I)$. Wir setzen noch

$$T_0(M)/N_0 =: A_0[X].$$

Um universelle Objekte in den übrigen Kategorien zu konstruieren, definieren wir nun einige Ideale in $T_0(M)$.

N'_1 : = Das von der Menge

$$\{i(1) \otimes i_m(I'_1) - i_m(X'_1), i_m(X'_1) - i_m(X'_1) \otimes e(1) : i \in I\}$$

in der Tensoralgebra $T_0(M)$ erzeugte Ideal.

N'_c : = Das von der Menge

$$\{e(c) \otimes i_m(X'_1) - i_m(X'_1) \otimes e(c) : c \in Z(A), i \in I\}$$

in $T_0(M)$ erzeugte Ideal.

N'_k : = Das von der Menge

$$\{e(a) \otimes i_m(X'_1) - i_m(X'_1) \otimes e(a) : a \in A, i \in I\}$$

in $T_0(M)$ erzeugte Ideal.

N^k : = Das von der Menge

$$\{i_m(X_1) \otimes i_m(X_j) - i_m(X_j) \otimes i_m(X_1) : i, j \in I\}$$

in $T_0(M)$ erzeugte Ideal.

$$N_1 := N'_1 + N_0, \quad N_c := N'_c + N_0, \quad N_s := N'_1 + N'_c + N_0$$

$$N_k := N'_k + N'_1 + N_0$$

$$N_v^k := N_v + N^k \quad (v = 0, 1, c, s, k)$$

Wir beginnen nun wie in Teil a) des Beweises von Satz 1.1 mit einem Objekt $\langle A, x, I \rangle$ aus der Kategorie $C_{\vee}(A, I)$ (bzw. $C_{\vee}^k(A, I)$). Dann erhält man genauso wie im Beweis zu Satz 1.1 einen Algebren-Homomorphismus F von $T(M)$ in $\langle A, x, I \rangle$, der auf $N_{\vee}$ bzw. $N_{\vee}^k$ verschwindet. F kann daher durch einen Algebren-Homomorphismus F' über $T_0(M)/N_{\vee}$ bzw. $T_0(M)/N_{\vee}^k$ faktorisiert werden.

Wie in Teil b) des Beweises von Satz 1.1 rechnet man nach, daß $T_0(M)/N_{\vee} =: A_{\vee}[X]$ bzw. $T_0(M)/N_{\vee}^k =: A_{\vee}^k[X]$ universelle Objekte in den Kategorien $C_{\vee}(A, I)$ bzw. $C_{\vee}^k(A, I)$ sind.

Wir erhalten damit den

Satz 1.2: a) Jede der Kategorien $C_{\vee}(A, I)$ bzw. $C_{\vee}^k(A, I)$ ($v = 0, 1, c, s, k$) besitzt ein universelles Objekt.

b) Es gilt: $A_{\vee}[X] \cong A_0[X]/N_{\vee}/N_0$ und $A_{\vee}^k[X] \cong A_0[X]/N_{\vee}^k/N_0$ bzw. $A_{\vee}^k[X] \cong A_{\vee}[X]/(N_{\vee}^k/N_{\vee})$.

Nach Satz 1.2 b) ist jede der oben definierten Polynom-Algebren homomorphes Bild von $A_0[X]$ nach sehr einfach aufgebauten Relationenidealen. Diese Tatsache werden wir im § 2 und § 4 wesentlich ausnutzen.

Abschließend sei noch bemerkt, daß für den Polynomring $A_{\vee}^k[X]$ in einer Variablen ($v = 0, 1, c, s, k$) die Isomorphie $A_{\vee}^k[X] \cong A_{\vee}[X]$ besteht, da in diesem Fall $N^k = 0$ ist.

§ 2. Existenz von Graduierungen auf nichtkommutativen Polynomerweiterungen

Wir zeigen zunächst, daß die Polynom-Erweiterung $A_0[X]$ eine Graduierung besitzt, derart daß die Elemente von A den Grad Null und die $(X_i)_i \in I$ den Grad Eins haben. Bei der Durchführung des Beweises erhalten wir zugleich noch eine Darstellung für die Elemente von $A_0[X]$.

Wir beginnen mit den für den Beweis erforderlichen Konstruktionen, indem wir die direkte Summen-Darstellung von $T_0(M)$ ($M = A_+ \otimes F_I$) verfeinern. (Um die Schreibweise zu vereinfachen, werden wir identifizierende Monomorphismen nicht notieren.) Sei nun

$\{A_+, F_I\}$ die Menge mit den Elementen A_+ und F_I .

Für jede natürliche Zahl $K \geq 1$ sei

$J(K) :=$ Menge aller Abbildungen $j: [1, 2, \dots, K] \rightarrow \{A_+, F_I\}$,

$J :=$ Vereinigung aller $J(K)$,

$S_j(n) :=$ j -Bild von n ,

$S_j := S_{j(1)} \otimes S_{j(2)} \otimes \dots \otimes S_{j(K)}.$

Man sieht leicht ein, daß die Gleichungen

$$\otimes^K (A_+ \oplus F_I) = \bigoplus_{j \in J(K)} S_j; \quad T(M) = \bigoplus_{j \in J} S_j \text{ bestehen.}$$

Diese direkte Summe spalten wir auf die Moduln

$$D = \bigoplus_{j, P(j) = 1} S_j \text{ und } E = \bigoplus_{j, P(j) = 0} S_j$$

$$P(j) := \begin{cases} 1' \\ 0' \end{cases} \quad \text{wenn es} \quad \begin{cases} \text{kein} \\ \text{ein} \end{cases} \quad \text{Paar } (k, k+1) \text{ gibt, mit}$$

$$S_j(k) = S_j(k+1) = A_+$$

Wir erhalten: $T_0(M) = D \oplus E$.

Es bezeichne k_d die Beschränkung der kanonischen Restklassenabbildung $k: T(M) \longrightarrow A_0[X]$ auf den Untermodul D von $T_0(M)$.

Da in $A_0[X]$ jedes Produkt $a_1 a_2$ gleich $a_1 a_2$ ist, hat jedes Element von $A_0[X]$ schon in D wenigstens einen Repräsentanten - d.h. k_d ist surjektiv. Wir werden zeigen, daß der Durchschnitt des Relationenideals N_0 mit dem Untermodul D gleich Null ist und damit, daß jedes Element $A_0[X]$ genau einen Repräsentanten in D besitzt - d.h. k_d ist injektiv.

Um $D \cap N_0 = 0$ nachzuweisen, erklären wir eine lineare Abbildung B von $T(M)$ in den direkten Summanden D , die auf D die Identität ist und, die das Ideal N_0 auf Null abbildet.

Definition der linearen Abbildung B .

1. Schritt: Wir erklären mit Hilfe der auf A_+ vorgegebenen bilinearen Abbildung β , die die Multiplikation in der Algebra A beschreibt, für alle $n \geq 1$ lineare Abbildungen $\beta^n: \otimes^n A_+ \longrightarrow A_+$.

$\beta^2: \otimes^2 A_+ \longrightarrow A_+ : =$ Lineare Abbildung, die der auf A_+ vorgegebenen bilinearen Abbildung β entspricht.

Für $n \geq 3$ definieren wir induktiv $\beta^n: \otimes^n A_+ \longrightarrow A_+$ durch

$$\beta^n := \beta^2(\beta^{n-1} \otimes \text{id}_A): \otimes^n A_+ \longrightarrow A_+ \text{ und ergänzen}$$

$$\beta^1 := \text{id}_A$$

Durch die Assoziativität von β erhalten wir

$$\beta^{n+m} = \beta^2(\beta^n \otimes \beta^m).$$

2. Schritt: Es werden für die Summanden S_j von $T(M)$ mit Hilfe der im ersten Schritt definierten Abbildungen β^n lineare Abbildungen $B_j: S_j \longrightarrow D \subset T(M)$ in den Untermodul D von $T(M)$ definiert.

Es sei S_j ein Summand von $T(M)$. Wir fassen zunächst im Tensorprodukt S_j die zu extremalen A -Intervallen gehörigen Produkte von Faktoren A_+ durch Klammern zusammen. Dabei verstehen wir unter einem extremalen A -Intervall ein Teilintervall $[k, k']$ des Intervalls $[1, K]$, auf dem j definiert ist, welches den folgenden Bedingungen genügt:

a) es ist $j(x) = A_+$ für alle $x \in [k, k']$ und b) kein Intervall, welches das Intervall $[k, k']$ echt umfaßt, erfüllt die Bedingung a). Dann wählen wir zu S_j in D denjenigen Summanden S_j , aus, der an Stelle der Klammern in dem Tensorprodukt S_j den Faktor A_+ nur ein einziges Mal enthält. Die lineare Abbildung $B_j: S_j \longrightarrow S_j$, von S_j in den Summanden S_j , von D wird als Tensorprodukt der linearen Abbildungen id_{F_I} auf den Faktoren F_I und β^n auf den Klammern $\otimes^n A_+$ von S_j definiert.

Beispiel: Es sei $S_j = A_+ \otimes A_+ \otimes_{F_I} A_+ \otimes_{F_I} A_+ \otimes A_+ \otimes A_+$.

Dann ist $S_{j'} = A_+ \otimes_{F_I} A_+ \otimes_{F_I} A_+$ und

$$B_j = \beta^2 \otimes_{F_I} \text{id}_{F_I} \otimes \beta^1 \otimes_{F_I} \text{id}_{F_I} \otimes \beta^3$$

Da für Summanden S_j von D die Klammern (die extremalen A -Intervalle) nur aus einem einzigen Faktor A_+ bestehen, ist in diesem Fall $S_j = S_{j'}$ und $B_j = \text{id}_{S_j}$.

3. Schritt: Da $T_0(M)$ direkte Summe der S_j ist, gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung B von $T_0(M)$ in den Untermodul $D \subset T_0(M)$ mit der Eigenschaft, daß ihre Beschränkung auf die Summanden S_j mit den Abbildungen B_j übereinstimmt.

B ist auf D die Identität, da für jedes S_j aus D die Abbildung B_j die Identität ist; mithin gilt $B^2 = B$.

Wir haben noch zu zeigen, daß das Bild des Ideals N_0 unter der Abbildung B gleich Null ist.

a) für das Erzeugendensystem $N' = \{a_1 \otimes a_2 - a_1 a_2 : a_1, a_2 \in A\}$ des Ideals N_0 gilt $B(N') = 0$, denn es ist

$$\begin{aligned} B(a_1 \otimes a_2 - a_1 a_2) &= B(a_1 \otimes a_2) - B(a_1 a_2) = \beta^2(a_1 \otimes a_2) - \beta^1(a_1 a_2) \\ &= a_1 a_2 - a_1 a_2 = 0. \end{aligned}$$

b) Der von der Menge

$N'' = \{n', q \otimes n', n' \otimes r, s \otimes n' \otimes t : q, r, s, t \in T(M) \text{ und } n' \in N'\}$ in $T_0(M)$ erzeugte Untermodul ist gleich dem Ideal N_0 .

c) Man überlegt sich leicht, daß für je zwei Summanden S_i und S_j von $T_0(M)$ auf Grund der Gleichung $\beta^{n+m} = \beta^2(\beta^n \otimes \beta^m)$ die Beziehung

$$B(S_i \otimes S_j) = B(B(S_i) \otimes B(S_j))$$

besteht. Wegen der Linearität von B gilt daher für beliebige Elemente $s, t \in T_0(M)$

$$B(s \otimes t) = B(B(s) \otimes B(t)).$$

d) Es ist $B(N'') = 0$; denn es gilt nach a) und c)

$$B(n') = 0, B(n \otimes r) = 0, B(q \otimes n') = 0$$

und schließlich $B(s \otimes n' \otimes t) = B(B(s \otimes n') \otimes B(t)) = B(0 \otimes B(t)) = 0$.

Nun folgt aus $B(N'') = 0$ wegen b) auch $B(N_0) = 0$ für das Ideal N_0 .

Ein Element von $T_0(M)$, das sowohl in D als auch in N_0 liegt, ist notwendig gleich Null, denn es ist $B(x) = x$ für $x \in D$ und $B(x) = 0$ für $x \in N_0$.

Daher ist die Beschränkung k_d der kanonischen Restklassenabbildung k ein Modulisomorphismus der Moduln D und $A_0[X]$ ist.

Durch den Isomorphismus k_d übertragen wir die Graduierung von D , die wir anschließend definieren werden, auf den Modul $A_0[X]$.

Definition einer Graduierung des Moduls D mit nicht-negativen ganzen Zahlen

Jedes S_j enthält eine eindeutig bestimmte Anzahl von Faktoren F_I :

$$M_n := \text{Summe aller Summanden } S_j \text{ von } D, \\ \text{die den Faktor } F_I \text{ n-mal enthalten.}$$

Jedes S_j kommt in genau einem M_n vor. Daher ist die Summe der M_n direkt, und wir haben mit

$$D = \bigoplus M_n$$

eine Vergrößerung der direkten Summendarstellung von D durch die Moduln M_n und eine Indizierung der Summanden M_n mit nichtnegativen ganzen Zahlen - d.h. D ist ein graduierter Modul.

Der Isomorphismus k_d überträgt diese Graduierung von D auf $A_0[X]$. Wir zeigen, daß $A_0[X]$ in dieser Graduierung eine graduierte Algebra ist:

$$k_d(M_n) \cap k_d(M_m) \subset k_d(M_{n+m}).$$

a) Es gilt $k = k_d \circ B$, denn jedes Element t von $T(M)$ besitzt modulo N_0 einen Repräsentanten t_d in D (wegen $D \cap N_0 = 0$ sogar genau einen) und wir können schreiben $t = t_d + t_n$, wobei $t_n \in N_0$ ist.

Folglich gilt für jedes $t \in T(M)$:

$$k_d B(t) = k_d B(t_d + t_n) = k_d(B(t_d) + 0) = k_d(t_d) = k(t_d) + k(t_n) = k(t).$$

b) Es ist $B(M_n \otimes M_m) \subset M_{n+m}$, da die Anzahl der Faktoren F_I des Tensorprodukts $M_n \otimes M_m$ gleich der Summe der Anzahl der Faktoren F_I von M_n und M_m ist und die Abbildung B die Anzahl der Faktoren F_I unverändert läßt.

c) Da k_d und k und D übereinstimmen, erhalten wir mit a) und b) $k_d(M_n) \sqcup k_d(M_m) = k(M_n) \sqcup k(M_m) = k(M_n \otimes M_m) =$
 $= k_d B(M_n \otimes M_m) \subset k_d(M_{n+m})$.

Wir fassen die Überlegungen zusammen in

Satz 2.1: Die Polynom-Algebra $A_0[X]$ ist in der oben eingeführten Graduierung eine N -graduierte Algebra. Die Elemente von A haben dabei den Grad Null, die Elemente X_i ($i \in I$) den Grad Eins.

Daraus läßt sich ein entsprechendes Resultat für die übrigen der in § 1 definierten Polynomerweiterungen herleiten. Denn nach Satz 1.2b gelten folgende Isomorphismen:

$$A_v[X] \cong T_0(M)/N_v \cong (T_0(M)/N_0)/(N_v/N_0)$$

$$A_v^k[X] \cong T_0(M)/N_v^k \cong (T_0(M)/N_0)/(N_v^k/N_0)$$

($v = 0, 1, c, s, k$).

Nun sind die Ideale (N_v und N_v^k) modulo N_0 homogen erzeugt in Bezug auf die oben geführte Graduierung von $A_0[X]$.

Wir haben daher nach Satz 0.4 und Satz 0.5.

Satz 2.2: Die Polynom-Algebren $A_v[X]$ und $A_v^k[X]$

($v = 0, 1, c, s, k$) sind als homomorphe Bilder der

N -graduierten Algebra $A_0[X] \cong \bigoplus M_n$ nach homogenen

Idealen N -graduierte Algebren. Die kanonischen Restklassen-Homomorphismen sind homogen vom Grad Null, und es gilt für $v = 1, c, s, k$:

$$A_v[X] \cong \bigoplus (M_n + N_v)/N_v \quad \text{und}$$

$$A_v^k[X] \cong \bigoplus (M_n + N_v^k)/N_v^k.$$

Weiter haben wir durch den Isomorphismus k_d eine Darstellung der Elemente von $A_0[X]$ durch die Elemente der direkten Summe $D = \bigoplus M_n$ gewonnen. Natürlich können auch die Elemente von z. B. $A_1[X]$ durch Repräsentanten aus $\bigoplus M_n$ angegeben werden. Beim Rechnen mit diesen Ausdrücken stehen dann allerdings außer den in $A_0[X]$ gültigen Relationen noch die durch das Relationenideale N_1 gegebenen zur Verfügung. Gleichheit ist in diesem Fall Äquivalenz modulo N_1 . Einen genauen Darstellungssatz für die Polynomerweiterungen $A_1[X]$ und $A_s[X]$ in einer Variablen beweisen wir im Anhang. Die Erweiterung $A_k[X]$ wird in § 6.2 behandelt.

§ 3. Nichtkommutative formale Potenzreihen-Algebren.

Analog der Definition von Polynomerweiterungen stützen wir die Definition formaler Potenzreihen-Algebren nicht auf eine Konstruktion, sondern auf eine charakterisierende Eigenschaft, die in der kommutativen Theorie wohlbekannt ist. Man weiß nämlich, daß der (kommutative) Ring der formalen Potenzreihen über einem kommutativen Ring mit Eins auch als Kompletttierung des Polynomrings bezüglich der durch die X -adische Topologie auf dem Polynomring definierten uniformen Struktur charakterisiert werden kann.

Trotz der Ähnlichkeit im Vorgehen ist die Situation im Fall der formalen Potenzreihen ein wenig schlechter als im Fall der Polynomerweiterungen. Wenn man nämlich in der kommutativen Theorie Beweise über Polynomringe oder Beweise, die Polynomringe verwenden, studiert, stellt man fest, daß nur drei Sachverhalte eine wesentliche Rolle spielen, nämlich:

1) Die universelle Abbildungseigenschaft, 2) gute Kenntnis der Idealtheorie und 3) im Fall einer Variablen die Existenz der Gradfunktion. Nur die universelle Abbildungseigenschaft charakterisiert die Polynomringe. Im Falle der kommutativen formalen Potenzreihenringe ist die Situation weniger eindeutig; man weiß zwar, daß sie als Kompletttierungen charakterisiert sind, aber es ist nicht offensichtlich, daß diese Eigenschaft beweistechnisch grundlegend ist.

Bei der Durchführung der Vorbereitung der Definition und der Beweise stellte sich heraus, daß es sich bei den erhaltenen Sätzen in Wahrheit um Sätze über regulär graduierte Algebren handelt. Wir werden bei der Durchführung daher diesen allgemeineren Standpunkt einnehmen.

Definition 3.0: Eine $\mathbb{N}$ -graduierte R -Algebra $B = \bigoplus B$ heißt regulär graduiert, wenn B von B_0 und B_1 erzeugt wird.

Die hier gegebene Definition einer regulär graduierten Algebra unterscheidet sich von der Chevalley's ([3], Seite 150). Sie ist jedoch in dem Sinn natürlich, daß viele der bekannten graduierten Algebren im Sinn unserer Definition regulär graduiert sind; z. B. die Tensoralgebra, kommutative Polynomringe, sowie Grassmann- und Clifford-Algebren.

Wir schicken noch einige Bemerkungen voraus:

a) Eine R -Algebra B über einem topologischen Ring R heißt topologische R -Algebra, wenn auf B eine Topologie gegeben ist für die gilt:

- 1) B_+ ist in dieser Topologie eine topologische Gruppe
- 2) Die Multiplikation ist stetig, und
- 3) Die Abbildung $(r,b) \longrightarrow rb$ von $R \times B \longrightarrow B$ ist stetig.

Die Forderungen 1) und 2) sind gleichbedeutend mit der Forderung: B ist ein topologischer Ring.

Die Forderungen 1) und 3) sind gleichbedeutend mit der Forderung: B ist ein topologischer R -Modul.

b) Sei $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine absteigende Folge von Idealen eines Ringes. Wählt man die Ideale α_n als fundamentales Umgebungssystem der Null, so wird dadurch eine Ringtopologie definiert. Sie heißt die (α_n) -adische Topologie oder Filtrierungstopologie.

Sei α ein Ideal eines Ringes. Dann bilden die Potenzen α^n von α eine absteigende Folge von Idealen. Die durch diese Folge definierte Topologie heißt die α -adische.

c) Die (α_n) -adische (bzw. α -adische) Topologie ist genau dann separiert, wenn $\bigcap \alpha_n = 0$ (bzw. $\bigcap \alpha^n = 0$) ist.

d) Sei $B = \bigoplus B_n$ eine regulär graduierte Algebra, dann gibt es ein ausgezeichnetes Ideal, nämlich $\mathfrak{m} := (B_1)$. Da B regulär graduiert ist, gilt $\mathfrak{m}^n = \bigoplus_{s \geq n} B_s$.

Wir nennen die durch das Ideal $\mathfrak{m}$ definierte Topologie einer regulär graduierten Algebra ihre $\mathfrak{m}$ -adische Topologie. Die $\mathfrak{m}$ -adische Topologie einer regulär graduierten Algebra ist separiert, denn es gilt $\mathfrak{m}^n = 0$.

e) Nach N. Bourbaki [1b], § 3 gilt:

Eine abelsche topologische Gruppe besitzt eine durch die Topologie der Gruppe eindeutig bestimmte uniforme Struktur, aus der die Topologie der Gruppe zurückgewonnen

werden kann. Den einer abelschen topologischen Gruppe G zugeordneten uniformen Raum bezeichnen wir mit G^u .

Da eine abelsche topologische Gruppe eine eindeutig bestimmte uniforme Struktur besitzt, ist es sinnvoll, von Vollständigkeit zu sprechen.

Eine abelsche, separierte, topologische Gruppe G besitzt eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Komplettierung $\hat{G}$ die dadurch charakterisiert ist, daß $\hat{G}$ vollständig und separiert ist, und G dicht in $\hat{G}$ liegt.

f) Nach Bourbaki [1b], § 6 Théorème 1 gilt:

Seien A , B und C separierte, abelsche, topologische Gruppen, und $f : A \times B \longrightarrow C$ eine stetige biadditive Abbildung. Dann existiert zu f eine eindeutig bestimmte stetige und biadditive Fortsetzung $\hat{f} : \hat{A} \times \hat{B} \longrightarrow \hat{C}$ auf die Komplettierungen.

g) Aus der Topologie ist folgender Schluß bekannt:

Es seien X und Y topologische Räume, Y sei separiert und f und g zwei stetige Abbildungen von X in Y . Weiter sei D eine dichte Teilmenge von X , und es gelte $f|D = g|D$ dann gilt $f = g$ auf ganz X .

Man bezeichnet diese Schlußweise als das "Prinzip der Fortsetzung von Identitäten!"

Wir haben in Bemerkung b) festgestellt, daß durch eine absteigende Folge von Idealen $(\mathfrak{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einer R -Algebra B auf B eine Ringtopologie definiert ist. Wir beweisen nun den

Hilfssatz 3.1: Sei R ein diskret topologisierter Ring, B eine R -Algebra und $(\mathfrak{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine absteigende Folge von Idealen in B . Dann ist B in der $(\mathfrak{a}_n)$ -adischen Topologie eine topologische R -Algebra.

Beweis: Da die $(\mathfrak{a}_n)$ -adische Topologie eine Ringtopologie ist, haben wir nur noch nachzuweisen, daß die Abbildung

$$f: (r, b) \longrightarrow rb \quad \text{von } R \times B \text{ in } B$$

stetig ist bezüglich der Produkttopologie auf $R \times B$.

Nun bilden die Mengen $\{b + \mathfrak{a}_n\}$, wenn b die Elemente von B und n die natürlichen Zahlen durchläuft, eine Basis für die Topologie von B . Um zu zeigen, daß die Abbildung f stetig ist, genügt es zu zeigen, daß die Urbilder $f^{-1}(b + \mathfrak{a}_n)$ der Mengen $\{b + \mathfrak{a}_n\}$ offen sind. Wir werden zeigen, daß es zu jedem Punkt (r, x) von $f^{-1}(b + \mathfrak{a}_n)$ eine offene, in $f^{-1}(b + \mathfrak{a}_n)$ enthaltene Umgebung von (r, x) gibt. Daraus entnehmen wir, daß $f^{-1}(b + \mathfrak{a}_n)$ offen ist.

Sei also (r, x) ein Punkt des Urbilds $f^{-1}(b + \mathfrak{a}_n)$. Dann ist $rx = b + t_x$, wobei t_x ein Element von $\mathfrak{a}_n$ ist. Die Menge $O(r, x) := \{(r, x+t) : t \in \mathfrak{a}_n\}$ ist als Quader mit der in R offenen Seite r und der in B offenen Seite $\{x + \mathfrak{a}_n\} = \{x+t : t \in \mathfrak{a}_n\}$ in der Produkttopologie von $R \times A$ offen.

Die Menge $O(r, x)$ ist in $f^{-1}(b + \mathfrak{C}_n)$ enthalten, denn $f(r, x+t) = r(x+t) = rx + rt = b + t_x + rt$ ist ein Element von $b + \mathfrak{C}_n$ da $t_x + rt$ in $\mathfrak{C}_n$ liegt.

Damit ist die Stetigkeit von $f: (r, x) \longrightarrow rx$ nachgewiesen.

Nach diesen Vorbereitungen zeigen wir den

Satz 3.2: a) Eine regulär graduierte R -Algebra $B = \bigoplus B_n$ ist in ihrer $\mathfrak{m}$ -adischen Topologie eine separierte, topologische R -Algebra.

b) B besitzt eine Kompletzierung $\widehat{B}$ bezüglich der aus ihrer $\mathfrak{m}$ -adischen Topologie abgeleiteten uniformen Struktur und $\widehat{B}$ ist eine (topologische) R -Algebra.

Beweis: ad a). Die Behauptung folgt aus Bemerkung d) und aus dem Hilfssatz 3.1.

ad b). Nach a) ist B_+ eine abelsche, separierte, topologische Gruppe. Daher existiert nach Bemerkung e) eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Kompletzierung $\widehat{B}$. Wir wenden nun Bemerkung f) an auf die nach a) stetigen, biadditiven Abbildungen

$$\begin{array}{ll} m: (b, b') \longrightarrow bb' & \text{(Produktbildung in } B \text{) und} \\ f: (r, b) \longrightarrow rb & \text{(Skalarenmultiplikation)} \end{array}$$

und erhalten Fortsetzungen $\widehat{m}: \widehat{B} \times \widehat{B} \longrightarrow \widehat{B}$ und $\widehat{f}: R \times \widehat{B} \longrightarrow \widehat{B}$. Daß $\widehat{f}$ auf $\widehat{B}$ eine R -Modulstruktur definiert und m bilinear und assoziativ ist, folgt aus

dem Prinzip der Fortsetzung von Identitäten. Natürlich sind $\hat{f}$ und $\hat{m}$ stetig.

Wir wollen Satz 3.2 auf die in § 1 definierten Polynom-erweiterungen anwenden, um formale Potenzreihen-Algebren zu definieren. Man überlegt sich dazu zuerst, daß die in § 2 eingeführten Graduierungen regulär sind, denn die Konstanten und die Familie $X = (X_i)_{i \in I}$ sind Erzeugende für die Polynom-erweiterungen, die in der in § 2 angegebenen Graduierung homogen von Grad Null bzw. Eins sind.

Weiter überlegt man sich, daß das von der Menge X erzeugte Ideal der Polynom-erweiterungen gleich dem Ideal ist, das von den Elementen vom Grad Eins erzeugt ist. Es gilt also

Satz 3.3: Die Polynom-erweiterungen $A_\vee[X]$ und $A_\vee^k[X]$ sind für alle v ($v = 0, 1, c, s, k$) in der durch Satz 2.2 gegebenen Graduierung regulär graduiert, und die zugehörige m -adische Topologie ist gleich der (X) -adischen.

Satz 3.3 und Satz 3.2 gestatten die

Definition 3.2: Die Kompletttierung der Polynom-Algebren $A_\vee[X]$ und $A_\vee^k[X]$ bezüglich der (X) -adischen Topologie heißt formale Potenzreihen-Algebra vom Typ K_s in I Variablen über A .

Die Kompletttierung bezeichnen wir in Anlehnung an die kommutative Notation mit $A_\vee[[X]]$ bzw. $A_\vee^k[[X]]$.

Bemerkung: Eine formale Potenzreihen-Algebra vom Typ K_S ist nach dem Prinzip der Fortsetzung von Identitäten in der Tat eine Erweiterung der Algebra A , die in der Klasse $K_S(A)$ liegt.

Wir beweisen nun einen Darstellungssatz für die m -adische Komplettierung $\hat{B}$ einer regulär graduierten R -Algebra B , der sich nach Satz 3.3 auf formale Potenzreihen-Algebren anwenden läßt, und der es gestattet, die topologische Definition 3.2 formaler Potenzreihen-Algebren durch eine algebraische Konstruktion zu ersetzen.

Wir definieren zunächst die darstellende Algebra:

Definition 3.3: Sei $B = \bigoplus B_n$ eine graduierte Algebra.

Dann trägt die Menge

$$B^D := \prod_{n \geq 0} B_n$$

in natürlicher Weise eine R -Modulstruktur. Es seien $f = (f_n)$ und $g = (g_n)$ Elemente von B^D ; dann wird ein Produkt (fg) durch die Angabe der Komponenten

$$(fg)_n := \sum_{s=0}^n f_s g_{n-s}$$

erklärt.

Diese Definition ist zulässig, da jedes der endlich vielen Produkte $f_s g_{n-s}$ ein Element von $B_s B_{n-s} \subset B_n$ ist. Die Bilinearität und Assoziativität dieses Produkts folgt aus den entsprechenden Eigenschaften von B .

Wir bezeichnen nun die auf die oben beschriebene Art aus einer graduierten Algebra konstruierte Algebra mit B^D .
 B ist eine Teilalgebra von B^D .

Satz 3.4: Sei B eine regulär graduierte Algebra. Dann ist ihre $\mathfrak{M}$ -adische Kompletterung $\hat{B}$ isomorph zu B^D .

Beweis: Der Ring R und die additiven Gruppen B_n seien diskret topologisiert, also vollständig. B^D trage die Produkttopologie, die wir mit T bezeichnen wollen. B^D ist mit der Gruppentopologie T eine vollständige (abelsche) Gruppe. Denn mit den Bezeichnungen von Bemerkung e) gilt

$$(\prod B_n)^u \cong \prod B_n^u$$

wobei das Produkt $\prod B_n$ in der Kategorie der topologischen Gruppen, das Produkt $\prod B_n^u$ in der Kategorie der uniformen Räume genommen ist. Da ein Produkt vollständiger uniformer Räume vollständig ist, ist B^D in der Topologie T vollständig.

2) Die Topologie T ist gleich der Filtrierungstopologie F , die durch die absteigende Folge von Untergruppen

$$\alpha_n := \underbrace{0 \times 0 \times 0 \times \dots \times 0}_{n\text{-mal}} \times \bigoplus_s B_s \supseteq n B_s$$

definierte Gruppentopologie auf B^D .

Zum Beweis vergleichen wir die Nullumgebungsbasen.

Eine Nullumgebungsbasis für die (Produkt-) Topologie T läßt sich wie folgt beschreiben: Für jede endliche Teilmenge $F \subset \mathbb{N}$ sei

$U_F := \prod^{\mathbb{N}} X(n)$ wobei $X(n) = 0$ falls $n \in F$ und $X(n) = B_n$ falls $n \notin F$.

Dann ist $\{U_F : F \subset \mathbb{N}, F \text{ endlich}\}$ nach Definition der Produkttopologie eine Nullumgebungsbasis.

Offensichtlich sind die $\mathcal{O}_n$ offen in T . Sei umgekehrt U_F gegeben und $x \in U_F$. Sei weiter $k := \max\{n : n \in F\} + 1$. Dann ist $x + \mathcal{O}_k \subset U_F$ und $U_F = \bigcup_{x \in U_F} (x + \mathcal{O}_k)$ ist daher als Vereinigung von in der Filtrierungstopologie offenen Menge offen.

3) Da die $\mathcal{O}_n$ aus 2) in Wahrheit Ideale und nicht nur Untergruppen sind, folgt mit 1), 2) und Hilfssatz 3.1: B^D ist in der Topologie T (bzw. F) eine vollständige topologische R -Algebra.

4) B liegt T -dicht in B^D , denn sei $f = (f_n)$ ein Element von B^D , dann konvergiert die in B gelegene Folge $h_s := \sum_{n=0}^s f_n$ (wegen $f - h_s \in \mathcal{O}_s$) gegen f .

5) Die von der Filtrierungstopologie F auf B induzierte Topologie ist gleich der m -adischen Topologie der regulär gradierten Algebra. Daher ist die m -adische Komplettierung $\hat{B}$ von B algebraisch und topologisch isomorph zu B^D .

Bemerkung: Dieser Beweis läßt sich fast wörtlich auf beliebige graduierte Algebren übertragen, wenn man die $\mathfrak{m}$ -adische Topologie durch eine Filtrierungstopologie ersetzt.

§ 4. Derivationen auf den Polynomalgebren

Sei M ein R -Modul (über einem kommutativen Ring mit Eins) und f eine R -lineare Abbildung von M in sich. Dann ist die folgende Konstruktion einer Derivation D_f auf $T_0(M)$ bekannt (vgl. Bourbaki, Groupes et algèbre de Lie I, p. 35).

Man definiert eine lineare Abbildung $D_f^n : \otimes^n M \longrightarrow \otimes^n M$ durch

$$D_f^n := f \otimes \otimes^{n-1} I + \sum_{s=1}^{n-2} \otimes^s I \otimes f \otimes \otimes^{n-s-1} I + \\ + \otimes^{n-1} I \otimes f,$$

wobei I die Identität auf M ist.

Diese R -linearen Abbildungen D_f^n setzen sich fort zu einer R -linearen Abbildung der direkten Summe $T_0(M) = \bigoplus_{n=0} (\otimes^n M)$, die wir mit D_f bezeichnen. D_f ist eine Derivation der Tensor-Algebra $T_0(M)$ aufgrund der aus der Definition der Abbildungen D_f^n ersichtlichen Relation

$$D_f^{r+s} = D_f^r \otimes \otimes^s I + \otimes^r I \otimes D_f^s.$$

(Es sei bemerkt, daß durch diese Konstruktion einer Derivation auf $T_0(M)$ zu einer vorgegebenen R -linearen Abbildung von M in sich eine Isomorphie zwischen der zum Endomorphismen-Algebra $\text{Hom}(M, M)$ gehörigen Lie-Algebra $\mathcal{L}(\text{Hom}(M, M))$ und der Lie-Algebra der homogenen Derivationen vom Grad Null von $T_0(M)$ geliefert wird.)

Wir benutzen nun diese Konstruktion, um auf den im ersten Paragraphen definierten Polynom-Algebren (falls A eine Algebra mit Eins ist) Derivationen zu definieren.

Bis zum Ende dieses Paragraphen sei A stets eine Algebra mit Eins.

In den Bezeichnungen stützen wir uns auf Paragraph 1.

Zunächst wird für jedes $i \in I$ eine lineare Abbildung

$f_i: M \longrightarrow M$ ($M = A \oplus F_I$) wie folgt definiert:

$f_i|_A = 0$ und $f_i(X_j) = \delta_{ij} \cdot 1$ ($1 \in A$) auf F_I

(δ_{ij} ist das Kroneckersymbol).

Die Fortsetzung von f_i nach der obigen Konstruktion zu einer Derivation von $T_0(M)$ bezeichnen wir mit D_i und beweisen den

Hilfssatz 4.1: Die Ideale N_0, N_1, N_c, N_k, N_s und $N^k + N_1$ von $T_0(M)$ sind für jedes D_i ($i \in I$) differentielle Ideale.

Beweis: Nach Satz 0.6 genügt es zu zeigen, daß die Ableitungen eines Erzeugendensystems eines Ideals im Ideal liegen, um nachzuweisen, daß es sich um ein differentielles Ideal handelt. Erzeugendensysteme für die Ideale N_0, N_1', N_c', N_k' und N^k sind beziehentlich die Mengen (vgl. S 10)

- (a) $\{ a \otimes b - ab : a, b \in A \}$
- (b) $\{ 1 \otimes X_i - X_i \otimes 1 - X_i : i \in I \}$
- (c) $\{ c \otimes X_i - X_i \otimes c : c \in Z(A), i \in I \}$
- (d) $\{ a \otimes X_i - X_i \otimes a : a \in A, i \in I \}$
- (e) $\{ X_i \otimes X_k - X_k \otimes X_i : i, k \in I \}$

(Auf die Notation identifizierender Isomorphismen wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet.)

Wir berechnen nun die Ableitungen der Erzeugenden.

(A) N_0 ist differentielles Ideal, denn für jedes D_j gilt:

$$D_j(a \otimes b - ab) = D_j(a) \otimes b + a \otimes D_j(b) - D_j(ab) = 0$$

denn jedes D_j verschwindet auf den Konstanten.

(B) $N_1 = N'_1 + N_0$ ist differentiell, denn es gilt

$$D_j(1 \otimes X_i - X_i) = D_j(1) \otimes X_i + 1 \otimes D_j(X_i) - D_j(X_i) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 \otimes 1 - 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$$

$$\text{und ebenso } D_j(X_i \otimes 1 - X_i) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 \otimes 1 - 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$$

Da $1 \otimes 1 - 1 = 1 \otimes 1 - 1 \cdot 1 \in N_0$ ist, folgt mit (A), daß das durch die Erzeugendensysteme von N_0 und N'_1 gegebene Erzeugendensystem von N_1 durch jedes D_j in N_1 abgebildet wird.

(C) $N_c = N'_c + N_0$ ist differentielles Ideal, denn es gilt:

$$D_j(c \otimes X_i - X_i \otimes c) = D_j(c) \otimes X_i - c \otimes D_j(X_i) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ c \otimes 1 - 1 \otimes c & \text{falls } i = j \end{cases}$$

Da $c \otimes 1 - 1 \otimes c = (c \otimes 1 - c \cdot 1) - (1 \otimes c - 1 \cdot c)$ in N_0 liegt, folgt mit (A), daß N_c für jedes D_j ein differentielles Ideal ist.

(D) Mit den gleichen Argumenten wie in (C) beweist man, daß N_k differentiell ist.

(E) $N^k + N_1$ ist differentiell, denn für das Erzeugendensystem

$\{X_1 \otimes X_k - X_k \otimes X_1 : i, k \in I\}$ von N^k gilt,

$$D_j(X_1 \otimes X_k - X_k \otimes X_1) = D_j(X_1) \otimes X_k + X_1 \otimes D_j(X_k) - D_j(X_k) \otimes X_1 - X_k \otimes D_j(X_1) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} 0 & j = k = 1 \\ 1 \otimes X_k - X_k \otimes 1 & \text{für } j = 1, j \neq k \\ 1 \otimes X_1 - X_1 \otimes 1 & j \neq 1, j = k \\ 0 & j \neq k, j \neq 1 \end{array} \right\}$$

Da die Summe differentieller Ideale differentiell ist, folgt aus (B) und (C) und (E), daß $N_s = N_1 + N_c$ und N_v^k ($v = 1, s, k$) differentielle Ideale sind.

Wir erhalten daher mit Satz 0.7 den

Satz 4.2: Auf den Polynomialgebren $A_v[X]$ ($v = 0, 1, c, s, k$) und

$A_v^k[X]$, ($v = 1, s, k$) existiert eine Familie von Derivationen $(D_j)_{j \in I}$ mit $D_j(a) = 0$ für alle $a \in A$ und alle $j \in I$ und $D_j(X_1) = \delta_{1j} \cdot 1$ (δ_{1j} Kroneckersymbol).

(Dasselbe Beweisverfahren wird in § 6, Satz 6.6b die Existenz einer Derivation für Ore-Erweiterungen liefern.)

Wenn wir die § 2 erklärte Graduierung der Polynomereweiterungen von A formal durch $M_{-n} := 0$ zu einer Z -Graduierung ergänzen, so werden die Derivationen D_j homogene R -lineare Abbildungen vom Grade (-1) in Bezug auf die so erklärte Graduierung. Folglich sind die D_j stetig in Bezug auf die m -adische Topologie, und können - da sie als lineare Abbildungen gleichmäßig stetig sind bezüglich der durch die

m -adische Topologie indizierten uniformen Struktur - auf die Kompletzierung fortgesetzt werden. Da die Fortsetzung einer Derivation eine Derivation ist, erhalten wir den

Satz 4.3: Auf den formalen Potenzreihen-Algebren $A_v[[X]]$, ($v = 0, 1, c, s, k$) und $A_v^k[[X]]$ ($v = 1, s, k$) existiert eine Familie von Derivationen $(D_j)_{j \in I}$ mit $D_j(A) = 0$ für alle $a \in A$ und alle $j \in I$ und $D_j(X_i) = \delta_{ij} \cdot 1$ (δ_{ij} Kroneckersymbol).

Es sei bemerkt, daß Satz 4.2 trotz formaler Übereinstimmung mit einem bekannten Satz über kommutative Polynomringe

~~durch Satz 4.2~~ weniger weitreichende Konsequenzen liefert.

Genauer:

Sei S ein kommutativer Ring mit Eins. $S[X]$ der kommutative Polynomring in n Variablen über S und $D(n, S)$ die Menge aller Derivationen von $S[X]$ in sich, die auf S verschwinden. Dann bilden die D_j von Satz 4.2 entsprechenden partiellen Ableitungen eine Basis für den $S[X]$ -Modul $D(n, S)$.

Die Ursache dafür, daß dieses Resultat nicht auf nichtkommutative Polynomringe übertragbar ist, liegt einerseits in der Tatsache begründet, daß bei einem nichtkommutativen Ring P die Menge der Derivationen von P in sich - im Gegensatz zu kommutativem P - keinen P -Modul bilden.

Wir zeigen dies an einem Beispiel:

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, A die R -Algebra R und $|I| = n$ endlich. Wir zeigen in Paragraph 6:

$A_S[X] \cong T(M)$, wobei $T(M)$ die Tensoralgebra des freien R -Moduls $M = RX_1 \oplus RX_2 \oplus \dots \oplus RX_n$ ist.

Nach Satz 4.2 ist D_1 eine Derivation von $T(M)$ mit $D(r) = 0$ für alle $r \in R$ und $D_1(X_1) = \delta_{11} \cdot 1$.

Jedoch: $(X_1 D_1)$ ist keine Derivation von $T(M)$, denn es gilt

$$(X_1 D_1)(X_2 X_1) = X_1(D_1(X_2 X_1)) = X_1(D_1(X_2)X_1 + X_2 D_1(X_1)) = X_1 X_2.$$

Wäre $(X_1 D_1)$ eine Derivation, so müßte gelten

$$(X_1 D_1)(X_2 X_1) = (X_1 D_1)(X_2)X_1 + X_2(X_1 D_1)(X_1) = X_2 X_1.$$

Dieser Widerspruch beruht auf der Tatsache, daß X_1 nicht im Zentrum liegt und X_2 ein mit X_1 nicht vertauschbares Element ist.

Andererseits gibt es aber Derivationen auf $T(M)$ deren Werte auf einer Basis von M nicht im Zentrum von $T(M)$ liegen.

Verfolgt man nämlich die am Anfang dieses Paragraphen beschriebene Konstruktion einer Derivation von $T_0(M)$ zu beliebig vorgegebenen linearen Abbildungen von M in sich, so stellt man fest, daß diese Konstruktion auch dann noch möglich ist, wenn man lineare Abbildungen von M mit Werten in $T(M)$ zuläßt. Man kann daher eine Derivation von $T(M)$ konstruieren mit den Eigenschaften: $D(r) = 0$ für alle $r \in R$ und $D(X_1) = \delta_{11} X_1$.

$(X_1 D_1)$ und die Derivation D haben also auf den Konstanten und den Erzeugern $X_1, \dots, X_n$ die gleichen Werte, die beide auf ganz $T(M)$ definierten linearen Abbildungen stimmen aber auf $M \otimes M, M \otimes M \otimes M$ usw. nicht mehr überein.

Durch die Derivationen $(D_i)_{i \in I}$ werden daher nicht mehr alle Derivationen der nichtkommutativen Polynomerweiterungen beschrieben. Man erhält jedoch unter Verwendung von Satz 4.2 durch elementare Rechnung den

Satz 4.4: Sei P eine der in Satz 4.2 angegebenen Polynom-Algebren, wobei I eine endliche Menge ist und $Z(P)$ das Zentrum von P . Dann gilt:

- a) $c_i \in Z(P) \implies \sum c_i D_i$ ist eine Derivation von P
- b) Sei D eine Derivation von P mit $D/A=0$ und $D(X_i)$ liege im Zentrum von P , so ist $D = \sum D(X_i) D_i$
- c) Die Menge aller Derivationen von P mit $D/A = 0$ und $D(X_i) \in Z(P)$ bilden einen freien $Z(P)$ -Modul mit der Basis $(D_i)_{i \in I}$.

Eine Verallgemeinerung von Satz 4.4 auf unendlich viele Variable (d.h. $|I| = \infty$) ist durch Einführung eines Summierbarkeitsbegriffes für Familien linearer Abbildungen möglich.

§ 5. Eine Beziehung der Polynomialalgebra $A_S^k[X]$ zu den Polynomringen der kommutativen Theorie.

Bis zum Ende dieses Paragraphen sei $A = (A_+, \beta, R)$ eine feste kommutative R -Algebra mit Einselement 1.

r sei der auf der Kategorie der R -Algebren definierte (vergessende) Funktor, der einer R -Algebra A' den durch Nichtberücksichtigung des Operatorenbereichs R aus ihr hervorgehenden Ring $r(A')$ zuordnet. Von der Einschränkung von r auf $C_S^k(A, I)$ fordern wir, daß r die Indizes $i \in I$ der Erzeugenden nicht vergißt.

Die R -Algebra A werde in folgendem Sinn als Basistern verwendet: Auch bei Aussagen, in denen lediglich der Ring $r(A)$ vorkommt, sei die Kenntnis der R -Algebren-Struktur von A als bekannt vorausgesetzt.

Weiter benutzen wir die Abkürzung $A_S^k[X] =: A[X]$.

Die folgenden Bemerkungen dienen der Definition eines zum Funktor r inversen Funktors a , wobei die Eigenschaft, daß A Basistern ist, wesentlich verwendet wird. Die Existenz der Funktoren r und a , ermöglicht einen schnellen Beweis des

Satzes 5.1: Sei A eine kommutative R -Algebra mit Eins.

Dann gilt: $r(A[X]) \cong r(A)[X]$.

wodurch eine Übereinstimmung der in § 1 gegebenen Definition von "Polynomen" mit der in der Theorie der kommutativen Ringe üblichen Definition nachgewiesen ist.

Im Fall einer Variablen gilt sogar $A_S^k[X] = A_S[X]$.

Bem. 1) Sei $\langle A, x, I \rangle \in C_S^k(A, I)$. Dann kommutieren nach Definition von $C_S^k(A, I)$ die $(x_i)_{i \in I}$ untereinander und mit den Elementen des Zentrums von A , also bei einer kommutativen Algebra mit allen Elementen von A ;
d.h. $\langle A, x, I \rangle$ ist kommutativ.

2) Seien A' und A'' Erweiterungsalgebren der Algebra A und g ein Algebren-Homomorphismus von A' nach A'' der auf A die Identität ist. Dann definiert die Abbildung g natürlich einen Ringhomomorphismus von $r(A')$ nach $r(A'')$ der auf $r(A)$ die Identität ist; wir bezeichnen ihn mit $r(g)$. Natürlich gilt für zwei Algebren-Homomorphismen f und g : $r(fg) = r(f)r(g)$.

3) Sei $A' = \langle A, x, I \rangle$ und $\langle A, x, I \rangle \in C_S^k(A, I)$. Dann ist natürlich $r(A')$ unitär und kommutativ (Bem. 1). Wir zeigen $r(A')$ wird von den $(x_i)_{i \in I}$ über $r(A)$ als Ring erzeugt. Sicher wird der Ring $r(A')$ von der Menge $\{rx_i : r \in R \text{ und } i \in I\}$ über $r(A)$ als Ring erzeugt. Nun enthält aber der von den $(x_i)_{i \in I}$ über $r(A)$ erzeugte Ring alle Elemente rx_i , denn es gilt die Gleichung $rx_i = 1(rx_i)$ und 1 liegt im Ring $r(A)$.
(Die Gleichung $1(rx) = (1r)x$ kann zwar in $r(A')$ nicht mehr hergeleitet werden, bleibt aber beim Übergang von A' zu $r(A')$ gültig.)

4) Sei $(r(A), I) =: C$ die Kategorie der kommutativen unitären Erweiterungsringe von $r(A)$, die von einer Menge $(x_i)_{i \in I}$ über $r(A)$ erzeugt sind. Die Morphismen seien die Ringhomomorphismen, die auf $r(A)$ die Identität sind und die die Erzeugenden (indexweise) aufeinander abbilden. Mit dieser Definition können wir die Bemerkungen

1) - 4) zusammenfassen: r ist ein Funktor von $C_S^k(A, I)$ in C .

5) Sei S' ein kommutativer unitärer Erweiterungsring von $r(A)$, dann kann S' mit einer R -Algebren-Struktur versehen werden. Die so erhaltene Algebra bezeichnen wir mit $a(S')$. $a(S')$ ist Erweiterungs-Algebra der Algebra A . Wird S' von der Familie $(x_i)_{i \in I}$ über $r(A)$ erzeugt, so wird auch die Algebra $a(S')$ von den $(x_i)_{i \in I}$ über A erzeugt. Beweis: Für alle $r \in R$ und $s' \in S'$ definieren wir $r \cdot s' := (r1_A)s'$. Diese Definition ist möglich, da die Kenntnis der Algebrenstruktur von A nicht hatte verloren gehen sollen - d.h. wir können das Element $r1_A$ bilden. $(r1_A)s'$ kann im Ring S' gebildet werden.

Man rechnet leicht nach, daß mit dieser Definition S'_+ ein unitärer R -Modul ist, daß die von S'_+ auf A induzierte R -Modul-Struktur mit der von A_+ übereinstimmt, und daß die biadditive Abbildung $\beta': (s', t') \longrightarrow s't'$ in Bezug auf die R -Modul-Struktur von S' bilinear ist. Damit haben wir S' mit einer R -Algebren-Struktur versehen.

Da S' Ringerweiterung von $r(A)$ ist, stimmen die zur Multiplikation gehörigen Abbildungen β' in S' und β in A bei Beschränkung auf A überein. Folglich ist $a(S')$ Erweiterungs-Algebra der Algebra A . (Die Erzeugungsbedingung ist klar.)

6) Seien S' und S'' kommutative, unitäre Erweiterungsringe von $r(A)$ und f ein Ringhomomorphismus von S' nach S'' , der auf $r(A)$ die Identität ist. Dann definiert die

Abbildung f einen Algebren-Homomorphismus von $a(S')$ nach $a(S'')$, der auf A die Identität ist und den wir mit $a(f)$ bezeichnen. Wir zeigen, daß f für die R -Modul-Struktur von $a(S')$ und $a(S'')$ linear ist:

$$f(r \cdot s') = f(r \cdot 1_A) s' = f(r \cdot 1_A) f(s') = (r \cdot 1_A) f(s') = r \cdot f(s').$$

7) Wenn wir für den kommutativen, unitären Erweiterungsring S' von $r(A)$ den Ring $r(a(S'))$ bilden, erhalten wir den Ring S' zurück, da beim Übergang zu $a(S')$ die Ringstruktur ungeändert bleibt. Also: $r(a(S')) = S'$. Wenn wir für die kommutative, unitäre Erweiterungs-Algebra A' der R -Algebra A die Algebra $a(r(A'))$ bilden, erhalten wir die Algebra A' zurück, da durch die Gleichung

$$r \cdot a' = (r \cdot 1) a' = 1(r a') = r a'$$

(die zwar im Ring $r(A')$ nicht mehr hergeleitet werden kann, aber als Gleichung beim Übergang zu $r(A')$ erhalten bleibt) die ursprüngliche R -Modul-Struktur wiederhergestellt wird. Also $a(r(A')) = A'$.

Auch für Homomorphismen f bzw. g haben wir, da die als Abbildungen beim Übergang zu $a(f)$ bzw. $r(g)$ nicht abgeändert werden $r(a(f)) = f$ und $a(r(g)) = g$.

Damit ist bewiesen, daß die Funktoren r und a zueinander invers sind, und der Funktor a die Kategorie C in die Kategorie $C_S^k(A, I)$ abbildet.

8) Man weiß aus der Theorie der kommutativen Ringe, daß der Polynomring $r(A)[X]$ in I Variablen $X = (X_i)_{i \in I}$ durch die universelle Abbildungseigenschaft in C (siehe Bem. 4) charakterisiert ist.

Nach diesen Vorbereitungen geben wir den Beweis zu Satz 5.1:

Sei O ein Objekt aus der Kategorie $C_S^k(A, I)$. Da $r(A)[X]$ in C universell ist, existiert genau ein Monomorphismus $f: r(A)[X] \longrightarrow r(O)$. Insbesondere also ein Morphismus

$$1) \quad g: r(A)[X] \longrightarrow r(A[X])$$

Entsprechend erhalten wir einen Morphismus

$$2) \quad h: A[X] \longrightarrow a(r(A)[X])$$

Wir transportieren nun die Sequenz 2) mittels des Funktors r in die Kategorie C und erhalten einen Morphismus

$$r(h): r(A[X]) \longrightarrow r(A)[X]$$

Da nach Definition der Morphismen C eine geordnete Klasse bildet, gilt: $r(h)g = \text{Identität}$ und $g r(h) = \text{Identität}$, womit Satz 4.5 bewiesen ist.

Da sowohl $A[X]$ als auch $r(A)[X]$ regulär graduert sind und die Erzeugenden $(X_1)_{1 \in I}$ in beiden Fällen den Grad 1 haben, erhalten wir den

Satz 5.2: Die Graduierungen von $r(A[X])$ und $r(A)[X]$ sind gleich.

Durch ein Argument wie in Bem. 3) erhalten wir, daß das von der Menge X in der Algebra $A[X]$ und das von der Menge X im Ring $r(A)[X]$ gebildete Ideal als Mengen gleich sind. Daher sind die Kompletterungen $A[[X]]$ und $r(A)[[X]]$ als abelsche Gruppen isomorph; nach dem Prinzip der Fortsetzung von Identitäten angewendet auf Ringhomomorphismen erhält man

Satz 5.3: Für die formalen Potenzreihenringe gilt:

$$r(A[[X]]) \cong r(A)[[X]].$$

Schließlich gilt, da für den kommutativen Polynomring $r(A)[X]$ die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial X_i}$ durch die Forderungen $\frac{\partial}{\partial X_i}(X_j) = \delta_{ij}$ und $\frac{\partial}{\partial X_i} | r(A) = 0$ eindeutig bestimmt sind, den

Satz 5.4: Für die Derivationen D_i von $A[X]$ gilt:

$$D_i = \frac{\partial}{\partial X_i}.$$

Anmerkung: Wählen wir für den Koeffizientenring R der R -Algebra A den Ring der ganzen Zahlen, so wird der Satz 5.1 trivial, denn jeder Ring hat in natürlicher Weise eine $\mathbb{Z}$ -Algebren-Struktur.

§ 6. Einige Typen nichtkommutativer Polynomerverweiterungen

Wir vergleichen in diesem Paragraphen die uns aus der Literatur bekannten nichtkommutativen Polynomringe mit den in dieser Arbeit behandelten. Wir erhalten in den ersten drei Fällen eine Identifikation, und in den Fällen 4) - 6) eine einfache Beschreibung der aus der Literatur bekannten Polynomringe mittels der in dieser Arbeit betrachteten Polynomerverweiterungen. Schließlich zeigen wir in 7), daß durch die Polynom-Algebra der Kategorie $C_s(A)$ auch die (durch keine der in 1) - 6) genannten Erweiterungen behandelbare) Algebra der polynomialen Abbildungen einer Matrix-Algebra in sich erfaßt werden kann.

1) Verallgemeinerung der Konstruktion des kommutativen Polynomrings in einer Variablen.

(Der anschließend beschriebene Ring kommt vor bei N. Jacobson [6], der sich auf Amitsur bezieht; verfolgt man die Arbeiten weiter zurück, so findet man die Namen Levitzki und Murnaghan; - ein erstes Zitat ist nicht ohne weiteres zu ermitteln. Da diese nahezu kommutative Konstruktion sicher auch in anderen Zusammenhängen auftaucht ist, werden wir diesen Polynomring einfach durch Anhängen eines Indexes "J" (Jacobson) bezeichnen. Entsprechend gehen wir in den übrigen Fällen vor.)

Sei S ein nichtkommutativer (d.h. ein nicht notwendig kommutativer) Ring mit Eins. Dann definiert man, (wie im Fall eines kommutativen (Grund-)Ringes einen Ring $S_J[X]$ als die Menge $\{g: \mathbb{N} \xrightarrow{g} S \text{ und Träger } (g) \text{ endlich}\}$, mit folgender Addition und Multiplikation: Für $g, h \in S_J[X]$ sei

$$(g + h)(n) := g(n) + h(n) \quad \text{und} \\ (gh)(n) := \sum_{v=0}^n g(v) h(n-v).$$

Es ist leicht nachzurechnen, daß $S_J[X]$ mit dieser Addition und Multiplikation (auch für einen nichtkommutativen Ring S) ein Ring mit Eins ist.

Setzt man noch $X := (0, 1, 0, 0, \dots)$ und identifiziert die Elemente s des Ringes S mit den Folgen $(s, 0, 0, 0, \dots)$, so ist der Ring S ein (unitärer) Teilring von $S_J[X]$ und jedes Element von $S_J[X]$ besitzt eine Darstellung der Form

$$\sum_{v=0} s_v X^v \quad (\text{mit } s_v \in S)$$

(Hier und im Folgenden ist $X^0 := 1$ gesetzt.)

Wir bemerken noch, daß $S_J[X]$ als Halbgruppenring der Halbgruppe $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen mit Koeffizienten in S definiert werden kann.

Satz 6.1: Sei $\bar{S} := Z\text{-Algebra } S, \text{ card}(I) = 1$ (also $X_1 = X$).

Dann gilt: $\bar{S}_K[X] \cong S_J[X]$.

Beweis: Wir zeigen, daß das zu $\bar{S}_J[X]$ gehörige Paar $\langle \bar{S}, X, \{1\} \rangle$ die universelle Abbildungseigenschaft für die Kategorie $C_k(\bar{S})$ besitzt. - Natürlich liegt $\langle \bar{S}, X, \{1\} \rangle$ in $C_k(\bar{S})$.

1) Jedes $\langle \bar{S}, x, \{1\} \rangle$ aus $C_k(\bar{S})$ liefert einen unitären Erweiterungsring $\langle \bar{S}, x, 1 \rangle$ von S ; folglich besitzt $\langle \bar{S}, x, \{1\} \rangle$ eine natürliche Links- S -Modulstruktur. Für $S_J[X] = \langle \bar{S}, X, \{1\} \rangle$ ist diese S -Modulstruktur gleich der durch

$$(sg)(n) = sg(n) \text{ (für } g \in S_J[X] \text{ und } s \in S)$$

gegebenen, woraus unmittelbar folgt, daß $S_J[X]$ ein freier S -Modul mit Basis $\{X^n : n \in \mathbb{N}\}$ ist.

2) Sei nun $\langle \bar{S}, x, \{1\} \rangle$ ein Objekt aus $C_k(\bar{S})$. Dann gilt für den zugehörigen S -Modul: $\langle \bar{S}, x, 1 \rangle_+ = \sum Sx^n$.

Da $S_J[X]_+ = \sum SX^n$ ein freier S -Modul ist, existiert ein eindeutig bestimmter S -Modulhomomorphismus F von $S_J[X]$ in $\langle \bar{S}, x, \{1\} \rangle_+ = \sum Sx^n$ mit $F(X^n) = x^n$

$$(\text{für alle } n \in \mathbb{N})$$

Wir behaupten: F ist ein Ring- ($\mathbb{Z}$ -Algebren-) Homomorphismus. Da $S_J[X]$ durch Summenbildung aus der Menge $\{sX^n : s \in S, n \in \mathbb{N}\}$ erzeugt wird, liefert die folgende Gleichung den Beweis:

$$F(sX^n)F(tX^m) = (sx^n)(tx^m) = stx^{n+m} = F(stX^{n+m}) = F((sx^n)(tx^m)).$$

2) Wir behandeln nun den, bei Amitsur [12] beschriebenen Polynomring, indem wir zunächst Amitsur [12], Seite 6 zitieren und dann diese Begriffsbildung neu formulieren:

"... let Ω be a ring ... and $\Omega[x] = \Omega[x_1, x_2, \dots]$ be the free ring generated by an infinite set of non-commutative indeterminates x_i over Ω . Every polynomial $p(x) \in \Omega[x]$ can be uniquely expressed in the form $p(x) = \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1, \dots, i_n} x_{i_1} \dots x_{i_n}$ where the monomials $x_{i_1} \dots x_{i_n}$ are all different."

Wir beschreiben nun diesen "freien Ring" noch einmal, indem wir ihn konstruktiv aufbauen.

Sei I eine Indexmenge, H_I die freie Halbgruppe mit den Erzeugenden $(X_i)_{i \in I}$. Dann ist der bei Amitsur angegebene Ring gleich dem Halbgruppenring $H_I[S]$ mit Koeffizienten in S (bei Amitsur: in Ω).

Sei nämlich $J_n(I) := \{j : [1, n] \xrightarrow[\text{Abb.}]{j} I\}$ und $J(I) = \bigcup_{n=1} J_n(I)$. Dann existiert zu jedem $h \in H_I$ ein $j \in J$ (etwa $j \in J_q(I)$), so daß $h = X_{j(1)} \dots X_{j(q)}$ ist. Ein Element des Halbgruppenrings $H_I[S]$ besitzt daher eine Darstellung $\sum_j s_j X_{j(1)} \dots X_{j(q)}$. Wir setzen noch $H_I[S] := S_A[X]$, wobei $X = (X_i)_{i \in I}$ ist.

Satz 6.2: Sei S ein Ring mit Eins, und $\bar{S} := Z\text{-Algebra } S$.

Dann gilt: $\bar{S}_k[X] \cong S_A[X]$.

Beweis: Es genügt, für $S_A[X] (= H_I[S])$ mit den ausgezeichneten Erzeugenden $(X_i)_{i \in I}$ (genauer: $\langle \bar{S}, X, I \rangle$ mit $\langle \bar{S}, X, I \rangle = S_A[X]$) die universelle Abbildungseigenschaft in $C_k(\bar{S})$ nachzuweisen.

a) Wie im Beweis zu Satz 6.1 überlegt man sich, daß die den Objekten $\langle \bar{S}, x, I \rangle$ von $C_k(\bar{S})$ zugrunde liegenden Ringe (Z -Algebren) eine natürliche Links- S -Modulstruktur haben. Nach Definition von $S_A[X] (= H_I[S])$ ist $S_A[X]$ in dieser S -Modulstruktur ein freier S -Modul mit Basis $\{H_I\}$.

b) Sei nun $\langle \bar{S}, x, I \rangle \in C_k(\bar{S})$, und sei $H(x, I)$ die von den $(x_i)_{i \in I}$ in der multiplikativen Halbgruppe von $\langle \bar{S}, x, I \rangle$ erzeugte Unterhalbgruppe. Da H_I eine freie Halbgruppe ist, gibt es genau einen (Halbgruppen-) Homomorphismus $f: H_I \longrightarrow H(x, I)$ mit $f(x_i) = x_i$.

Da die Elemente von H_I eine Basis für den S -Modul S_A bilden, besitzt f genau eine S -lineare Fortsetzung F von H_I auf $S_A[X]$ mit Werten in $\langle \bar{S}, x, I \rangle$. Der Beweis dafür, daß F ein Ringhomomorphismus ist, erfolgt wie in Satz 6.1 durch den Nachweis der Gleichung

$$\begin{aligned} F(s_j x_{j(1)} \dots x_{j(p)} x_{1(1)} \dots x_{1(q)}) &= \\ &= [s_j x_{j(1)} \dots x_{j(p)}] [x_{1(1)} \dots x_{1(q)}] \\ &= s_j s_1 x_{j(1)} \dots x_{j(p)} x_{1(1)} \dots x_{1(q)} \\ &= F[s_j s_1 x_{j(1)} \dots x_{j(p)} x_{1(1)} \dots x_{1(q)}] \\ &= F[(s_j x_{j(1)} \dots x_{j(p)}) (s_1 x_{1(1)} \dots x_{1(q)})]. \end{aligned}$$

Bemerkung: Betrachtet man den bei Jacobson angegebenen (und in Satz 6.1 behandelten) Polynomring $S_J[X]$ als Halbgruppenring $N[S]$ über der freien, von einem Element erzeugten Halbgruppe, so läßt sich Satz 6.1 aus Satz 6.2 folgern. Wir haben Satz 6.1 trotzdem direkt bewiesen, um die Natürlichkeit der Argumentation in diesem einfachen Fall hervorzuheben.

3) Bei P.M. Cohn [4] wird die Tensoralgebra $T(V)$ eines freien S -Moduls V mit Basis $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ - wobei S ein kommutativer Ring mit Eins ist - als Polynom-Algebra bezeichnet.

Wir setzen $T(V) =: S_C[X]$ und zeigen

Satz 6.3: Sei S ein kommutativer Ring mit Eins,

$\bar{S} := S$ -Algebra S , $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ und V ein freier S -Modul mit Basis $X = (X_i)_{i \in I_n}$.

Dann ist

$$\bar{S}_S[X] \cong S_C[X]$$

Beweis: Wir zeigen, daß $T(V)$ mit den ausgezeichneten

Erzeugenden $X = (X_i)_{i \in I_n}$ universell in $C_S(\bar{S}, I_n)$ ist.

Sei $\langle \bar{S}, X, I_n \rangle \in C_S(\bar{S}, I_n)$ und M der von den $(X_i)_{i \in I_n}$ in $\langle \bar{S}, X, I_n \rangle$ erzeugte S -Untermodule. Dann existiert (da nach

Voraussetzung V frei ist) eine eindeutig bestimmte

S -lineare Abbildung $f: V \longrightarrow M$ mit $f(X_i) = X_i$ ($i \in I_n$).

Nach Definition von $T(V)$ setzt sich f zu einem S -Algebren-

Homomorphismus in $\langle \bar{S}, X, I_n \rangle$ fort, denn $\langle \bar{S}, X, I_n \rangle$ ist

als ein Objekt aus $C_S(\bar{S}, I_n)$ eine S -Algebra.

Bemerkung: Derselbe Beweis liefert für einen freien Modul

$V = \sum_{i \in I} S X_i$ mit beliebiger Indexmenge $T(V) \cong \bar{S}_S[X]$.

Wichtiger als Satz 6.3 sind seine Konsequenzen.

Folgerung 6.3a) Bei der in Satz 1.1 durchgeführten Faktorisierung von $T_0(M)$ nach N_0 wurde von der universellen Abbildungseigenschaft der Tensoralgebra so wenig zerstört, daß sie im Falle einer kommutativen Grundalgebra zurückgewonnen werden kann. Es wurde im Gegenteil ein Informationsgewinn erzielt, dadurch daß mit $A_0[X] = T_0(M)/N_0$ eine Algebra mit universeller Abbildungseigenschaft über einem nichtkommutativen Grundring konstruiert ist.

Folgerung 6.3b) Da bei einer kommutativen Grundalgebra $\bar{S}$, wie man sich leicht überlegt, die Kategorien $C_k(\bar{S}, I)$ und $C_S(\bar{S}, I)$ gleich sind, folgt mit Satz 6.2: Für einen kommutativen Grundring R ist Cohns Polynom-Erweiterung gleich der von Amitsur. Denn mit den gleichen Betrachtungen wie in § 5 zeigt man, daß eine von X über der S -Algebra S erzeugte S -Algebra A als Ring gleich der von derselben Menge X über der Z -Algebra S erzeugten Z -Algebra ist.

Da Cohns Definition nur für kommutative Grundalgebren sinnvoll ist, stellt die Amitsursche Polynom-Erweiterung eine echte Verallgemeinerung dar; eine andere Verallgemeinerung ist durch $A_S[X]$ gegeben, aus der die Amitsursche Erweiterung als homomorphes Bild gewonnen werden kann. Mit diesen Überlegungen erhält man

Folgerung 6.3c) Sei R ein kommutativer Ring und V ein freier R -Modul mit der Basis $X = (X_i)_{i \in I}$. Dann ist $R[H_I] \cong T(V)$, wobei H_I die freie Halbgruppe über der Menge I ist.

(Wir vermuten, daß dieser Satz bekannt ist, obwohl wir keinen Literatur-Hinweis geben können.)

4) Wir zitieren jetzt die Arbeit von Noether-Schmeidler [9], Seite 6 und interpretieren diese Zitate in der in dieser Arbeit entwickelten Nomenklatur.

" 2. Der allgemeine Polynombereich.

Wir gehen aus von einem beliebigen abstrakt definierten Körper P (dessen Elemente wir mit kleinen lateinischen

Buchstaben bezeichnen), für den alle Regeln der Algebra insbesondere also auch das kommutative Gesetz der Multiplikation mit eindeutiger Umkehrung gilt. Diesem Körper adjungieren wir n Unbestimmte $\xi_1, \dots, \xi_n$, d.h. wir betrachten den aus den Produkten $a\xi_{v_1} b \xi_{v_2} \dots \xi_{v_n}$ und ihren endlichen Summen bestehenden Integritätsbereich J , wobei alle Gesetze der Addition und Multiplikation gelten sollen mit Ausnahme des kommutativen Gesetzes der Multiplikation."

Die Redeweise "Diesem Körper adjungieren wir ..." ist nicht so präzise, daß Existenz und Eindeutigkeit von J a priori gesichert wären. Außerdem fällt auf, daß ein Term $a \xi_{v_1} \dots \xi_{v_n}$ nicht auftaucht, obwohl später die Konstanten (d.h. Elemente aus $\mathbf{P}$) alleine vorkommen, also das Multiplizieren von rechts mit ihnen erlaubt sein muß. Insgesamt wird durch die Ausführungen des Zitats doch nahegelegt, den "Integritätsbereich J " (wegen der Eigenschaft Integritätsbereich verweisen wir auf den Anhang) mit der in dieser Arbeit definierten Polynom-Algebra $A_0[X]$ zu identifizieren, wobei A die $\mathbb{Z}$ -Algebra $\mathbf{P}$ ist; denn J enthält den Körper $\mathbf{P}$ und die $\xi_1, \dots, \xi_n$ und genügt außer den Ringgesetzen keinen weiteren Relationen.

"Insbesondere bezeichnen wir endliche Summen der Form $F(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum a_{v_1, \dots, v_n} \xi_{v_1} \dots \xi_{v_n}$ als Polynome (die durchweg mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet werden sollen). Wir unterwerfen nun die Größen von J an Stelle des kommutativen Gesetzes solchen

Produktgesetzen, daß das Produkt zweier Polynome wieder ein Polynom wird, der Bereich aller Polynome aus J also den Bereich J schon erschöpft. Dazu ist offenbar notwendig und hinreichend, daß für die Größen $\xi_1, \dots, \xi_n$ und irgendeine Größe a von P Produktregeln der Form

$$(5) \quad \xi_1 a = F_1(\xi_1, \dots, \xi_n) \quad (i = 1, \dots, n)$$

gelten, wobei $F_1(\xi_1, \dots, \xi_n)$ irgendein natürlich von ξ_1 und a abhängiges Polynom darstellt.

Denn da $\xi_1 a$ an sich kein Polynom ist, nach Voraussetzung aber dem Bereich angehört, so ist die Gleichung notwendig. Andererseits kann man durch endlich oftmalige Anwendung der Formel (5) jede Größe des Bereichs J in ein Polynom verwandeln. Für die Einheit des Körpers, die wir mit 1 bezeichnen, soll ferner gelten

$$\xi_1 1 = \xi_1 = 1 \xi_1."$$

Wir übersetzen dies im Hinblick auf die Punkte 5) und 6) unserer Liste in die in dieser Arbeit verwendete Sprache.

Die letzte Forderung des Zitats besagt, daß $A_1[X]$ statt $A_0[X]$ verwendet werden soll.

Sei ${}_A|X|$ der Links- A -Modul, der von den Elementen $h \in H(X)$ erzeugt wird, wobei $H(X)$ die von der Familie $(X_i)_{i \in I}$ in der multiplikativen Halbgruppe von $A_1[X]$ erzeugte Unterhalbgruppe einschließlich der Eins ist.

Sei weiter für jedes $i \in I$ eine Abbildung $F_i: A \longrightarrow A[X]$ gegeben. Dann nennen wir das Element $X_i a - F_i(a)$ eine Vertauschungsrelation.

Mit diesen Bezeichnungen läßt sich der Polynombereich des obigen Zitats wie folgt beschreiben:

Sei $A_1[X]$ die in Satz 1.1 beschriebene Polynom-Algebra in I Variablen und $(F_i)_{i \in I}$ eine Familie von Abbildungen von A in $A[X]$; (F) das von den Vertauschungsrelationen $\{X_i a - F_i(a)\}$ in $A_1[X]$ erzeugte Ideal.

Es ist klar, daß dann $A_F[X] := A_1[X]/(F)$ gerade der im Zitat beschriebene Polynombereich ist.

"Weiterhin wollen wir festsetzen, daß die Multiplikation der $\xi_1, \dots, \xi_n$ unter sich kommutativ sei."

Das bedeutet einen Übergang von $A_1[X]$ zu $A_1^C[X]$.

Es sei erwähnt, daß für den Fall einer Variablen $A_1[X] = A_1^C[X]$ ist.

"Jedes Polynom in J schreibt sich dann wie ein gewöhnliches Polynom von $\xi_1, \dots, \xi_n$ mit Koeffizienten aus P , und zwei Polynome stimmen nur überein, wenn alle Koeffizienten übereinstimmen."

Die hier behauptete Möglichkeit des Koeffizientenvergleichs ist gleichwertig zu der Behauptung $H(X)$ ist in $A_F[X]$ linear unabhängig in Bezug auf die A -Linksmodulstruktur von $A_F[X]$.

Das aber ist nicht richtig, denn wir können in 5) zeigen,

daß die A-Links-Unabhängigkeit der Menge $H(X)$ die Möglichkeiten der Auswahl der Vertauschungsrelationen wesentlich einschränkt, während nach Zitat F_1 irgendein Polynom sein darf.

Genauer zeigen wir unter Punkt 5) unserer Liste:

Für den Fall einer Variablen sind die Algebren $A_F[X]$ in denen $H(X)$ A-Linksunabhängig ist, genau die in der Dissertation von F.Schwarz [11] definierten nichtkommutativen Polynomringe. Das heißt aber, daß die F_1 zahlreichen Bedingungen unterworfen werden müssen.

5) Sei $A_F[X]$ die Polynom-Algebra $A_1[X]/(F)$ in einer Variablen X , die epimorphes Bild von $A_1[X]$ nach einem von Vertauschungsrelationen erzeugten Ideal (F) ist, derart daß die Potenzen von X - also $1, X, X^2 \dots$ - in $A_F[X]$ A-links-unabhängig sind.

Da im Fall einer Variablen die die Vertauschungsrelationen beschreibende Abbildung $F: A \longrightarrow_A X$ in der Form

$$F(a) = \sum_{n=0} f_n(a) X^n$$

geschrieben werden kann, benutzen wir diese explizitere Darstellung von F , um die Konsequenzen der Forderung

(U) := "die Potenzen von X sind A-links-unabhängig" genauer zu untersuchen.

Aus U folgt:

$(U \circ_1) f_n(a+b) = f_n(a) + f_n(b)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in A$,
denn es gilt:

$$\sum f_n(a+b) X^n = X(a+b) = Xa + Xb = \sum (f_n(a) + f_n(b)) X^n.$$

Da für jedes $a \in A$ $F(a)$ ein Polynom ist, gilt

(U 1) Für jedes a sind fast alle $f_n(a) = 0$.

Da $A_F[X]$ eine unitäre Erweiterung von A ist, gilt

(U 2) $f_1(1) = 1$ und $f_n(1) = 0$ für alle $n > 1$.

Wir berechnen nun (rekursiv) für $k \geq 0$ die Koeffizienten der "höheren Vertauschungsrelation"

$$X^k a = \sum_n f_n^{(k)}(a) X^n.$$

$$\text{Natürlich ist } f_n^{(0)} = \begin{cases} \text{Id}_A & \text{falls } n=0 \\ 0 & n>0 \end{cases}$$

$$\text{und } f_n^{(1)} = f_n \text{ für alle } n.$$

Man findet unter Ausnutzung des Assoziativgesetzes und Koeffizientenvergleich

für $k \geq 1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ die Rekursionsformel

$$(U 0_2) \quad f_n^{(k)} = \sum_{r=0}^n f_r \cdot f_{n-r}^{(k-1)}$$

denn es gilt:

$$\begin{aligned} X^k a &= \\ &= \sum_{s=0} [\sum_r f_r \cdot f_s^{(k-1)}(a) X^r X^s] \\ &= \sum_{n=0} [\sum_{r=0} f_r \cdot f_{n-r}^{(k-1)}(a)] X^n \end{aligned}$$

Durch nochmalige Anwendung des Assoziativgesetzes für die Konstanten $a, b \in A$ erhalten wir die Gleichung

$$(U 3) \quad f_n(a) = \sum_r f_r(a) f_n^{(r)}(b) \quad \text{für alle } a, b \in A,$$

denn es gilt:

$$\begin{aligned} f_n(ab) X^n &= X(ab) = (Xa)b = \left(\sum_{r=0} f_r(a) X^r \right) b \\ &= \sum_{r=0} f_r(a) f_n^{(r)}(b) X^n. \end{aligned}$$

Wir haben damit einer Polynom-Algebra $A_F[X]$, in der die Potenzen von X A-links-unabhängig sind, nach $(U\ 0_1)$ eine Folge $\mathcal{F} = (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Homomorphismen zugeordnet, derart daß die Doppelfolge $f_n^{(k)}$ nach $(U\ 0_2)$ durch die Folge f_n rekursiv bestimmt ist. Dies und die Bedingungen $(U\ 1)$, $(U\ 2)$ und $(U\ 3)$ entsprechen den Voraussetzungen von F. Schwarz ([11], Seite 1) unter denen zu einer Folge $\mathcal{F}$ von Homomorphismen (in [11], § 1) ein nicht-kommutativer Polynomring $A_{\mathcal{F}}[\wedge]$ konstruiert wird. $A_{\mathcal{F}}[\wedge]$ ist ([11], Seite 7) eine unitäre Erweiterung von A , in der $\wedge$ der Relation (vgl. [11], Seite 8, (1.14))

$$\wedge a = \sum f_n(a) \wedge^n \quad \text{genügt.}$$

(Es sei bemerkt, daß bei Schwarz [11] A kommutativ ist. Prüft man die Konstruktion von $A_{\mathcal{F}}[\wedge]$, so stellt man fest, daß die Kommutativität an keiner Stelle benutzt wird.)

Zusammenfassend erhalten wir

Satz 6.5: Die bei F. Schwarz [11] zu einer Folge $\mathcal{F} = (f_n)$ von additiven Homomorphismen eines Ringes A in sich definierten (verallgemeinerten Ore-Erweiterungen) $A_{\mathcal{F}}[\wedge]$ sind identisch mit den Polynom-Algebren $A_F[X] = A_1[X]/(F)$, in denen die Potenzen von X A-links-unabhängig sind.

6) Eine Polynom-Algebra B über einem nicht notwendig kommutativen Ring A mit Eins heißt Ore-Erweiterung, wenn $B = A_F[X]$ ist, wobei (wie in 5) die Potenzen von X

A-links-unabhängig sind und die Vertauschungsrelationen von der Form $Xa = f_0(a) + f_1(a)X$ sind.

Ore-Erweiterungen wurden von Ore [10] unter Bezugnahme auf Noether-Schmeidler [9] neu definiert, (vgl. auch Schwarz [11] Seite 9-11); sie ordnen sich vollständig der in 5) behandelten Schwarz'schen Konzeption unter.

Man weiß nach Ore [10] und Schwarz [11], insbesondere Seite 4, Beispiel 2) und Seite 9-10), daß $A_F[X]$ genau dann eine Ore-Erweiterung ist, wenn f_1 ein Ring-Homomorphismus von A in sich ist und f_0 die Gleichung $f_0(ab) = f_0(a)b + f_1(a)f_0(b)$ für alle $a, b \in A$ erfüllt. Ist f_1 die identische Abbildung Id_A , so ist f_0 eine Derivation von A. Sei umgekehrt d eine Derivation von A, dann genügt die Folge $f_0 := d$, $f_1 := \text{Id}_A$, $f_n = 0$ für alle $n > 1$ den Bedingungen (U 1), (U 2) und (U 3). Es gibt also nach Satz 6.5 eine Ore-Erweiterung $A_F[X]$, die den Vertauschungsrelationen $\{Xa - aX - d(a) : a \in A\}$ genügt. Weiter haben wir

Satz 6.6a: Ist $f_1 = \text{Id}_A$ und f_0 die triviale Derivation von A (d.h. $f_0(a) = 0$ für alle $a \in A$), so ist die Ore-Erweiterung $A_F[X] \cong A_K[X]$; ist überdies A kommutativ, so ist $A_F[X]$ isomorph zum kommutativen Polynomring über A.

Satz 6.6b: Sei $A_F[X]$ eine Ore-Erweiterung, für die $f_1 = \text{Id}_A$ gilt. Dann besitzt $A_F[X]$ eine nichttriviale Derivation D mit $D|_A = 0$ und $D(X) = 1$.

Beweis: a) Klar nach Definition von $A_k[X]$ (vgl. auch Ore [10], Seite 48).

b) Sei D die nach Satz 4.2 existierende nicht-triviale Derivation von $A_1[X]$ mit $D|A = 0$ und $D(X) = 1$.

Man zeigt: Die Menge $\{Xa - aX - f_0(a) : a \in F\}$ erzeugt in $A_1[X]$ ein differentielles Ideal. Daher besitzt $A_F[X] \cong A_1[X] / (F)$ eine nicht-triviale Derivation mit den behaupteten Eigenschaften.

Es sei bemerkt, daß für einen Ring, der eine nicht-triviale Derivation besitzt, nach Satz 6.6b auf der durch die Derivation bestimmten Ore-Erweiterung eine nicht-triviale Derivation existiert, die es ihrerseits wieder gestattet, eine Ore-Erweiterung zu konstruieren. Der Prozeß der Bildung einer Ore-Erweiterung kann also nach diesem Verfahren iteriert werden.

7) Bei Eichhorn ([5], Seite 31-32) findet man einen weiteren (nicht rein algebraischen) Polynombegriff. Er nennt, ausgehend von einer endlich dimensional reellen Algebra mit Eins, den von den konstanten Abbildungen und der Identität im Raume $F(A)$ aller Abbildungen von A in sich erzeugten Ring, den Polynomring über A . (Wir bezeichnen ihn mit $P(A)$, und nennen ihn Algebra der polynomialen Abbildungen von A in sich.) Die Verknüpfungen in $F(A)$ sind dabei punktweise erklärt, also $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$ und $(rf)(a) = r f(a)$.

Natürlich ist $P(A)$ nicht homomorphes Bild von $S_J[A]$, denn in $A_J[X]$ kommutiert X mit allen Konstanten, während

Id_A mit allen Konstanten nur dann kommutiert, wenn A kommutativ ist.

$(A_A[X_1, \dots, X_n])$ (siehe Punkt 2 unserer Liste) hat mehr Variable.)

$T_1(V)$ ist wegen der Voraussetzung, daß die Grundalgebra kommutativ sein soll, ungeeignet.

Wir zeigen nun, daß $P(A)$ nicht homomorphes Bild einer verallgemeinerten Ore-Erweiterung ist.

Angenommen es gäbe einen Homomorphismus $H : A_F[X] \longrightarrow P(A)$ mit $H(a) = a$ und $H(X) = \text{Id}_A$, dann wäre $\text{Id}_A a = \tau_n f_n(a) \text{Id}_A^n$, d.h. für jeden Punkt $x \in A$ würde gelten

$$xa = \tau_n f_n(a) x^n$$

insbesondere also für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und das Einselement $e \in A$

$$\lambda a = \sum \lambda^n f_n(a)$$

Das bedeutet:

$$f_0(a) + \lambda(f_1(a) - a) + \dots + \lambda^n f_n(a) = 0 \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Nach dem Identitätssatz für (reelle) Potenzreihen gilt daher

$$f_0(a) = 0, f_1(a) = a \text{ und } f_n(a) = 0 \text{ für } n > 1.$$

Es wäre also $xa = ax$ für alle $x, a \in A$; das aber heißt A ist kommutativ.

Wir haben jedoch den

Satz 6.7: Die Algebra $P(A)$ der polynomialen Abbildungen einer reellen endlich dimensionalen Algebra ist homomorphes Bild von $A_S[X]$.

Beweis: Es genügt zu zeigen $P(A) = \langle A, \text{Id}_A, 1 \rangle$ ist eine unitäre, zentrierte Erweiterung von A ; das aber ist elementar nachzurechnen.

Zusammenfassung

Die Inklusionen der Ideale $N_0 \subset N_1 \subset N_S \subset N_k$ liefern Epimorphismen der Polynomerweiterungen:

$$A_0[X] \longrightarrow A_1[X] \longrightarrow A_S[X] \longrightarrow A_k[X]$$

Damit lassen sich die in diesem Paragraphen ermittelten Isomorphismen wie folgt zusammenfassen:

$A_0[X]$		E. Noether-W.Schmeidler
$A_1[X]$	$\cong$	E. Noether-W.Schmeidler
$A_S[X]$	$\cong$	P.M.Cohn (falls A kommutativ ist)
$A_k[X]$	$\cong$	N.Jacobson, Amitsur

Die von F.Schwarz in [11] eingeführten Polynomringe sind epimorphe Bilder von $A_1[X]$ nach einem Ideal von Vertauschungsrelationen, so daß die Potenzen von X bezüglich A linksunabhängig sind.

Die Klasse der Oreschen Polynomringe ist in der von F.Schwarz definierten Klasse enthalten.

A n h a n g

Im zweiten Paragraphen war bewiesen worden, daß $A_0[X]$ durch die Moduln M_n graduert ist, so daß die Konstanten den Grad Null und die $(X_1)_{1 \in I}$ den Grad Eins haben (vgl. Seite 18). Dies hatte genügt um nachzuweisen, daß sämtliche Polynom-Erweiterungen $A_v[X]$ ($v=0,1,c,s,k$) graduert sind, da ihre Relationenideale in Bezug auf diese Graduierung von $A_0[X]$ homogen sind. Wir wollen nun für den Fall einer Variablen eine Graduierung von $A_1[X]$ explizit angeben. Dabei gewinnen wir eine Darstellung der Polynom-Erweiterung $A_1[X]$ in einer Variablen, die wir verwenden um die Nullteilerfreiheit von $A_1[X_1, \dots, X_n]$ unter gewissen Bedingungen zu beweisen.

Man weiß nach §2, daß die homogenen Elemente von $A_1[X]$ durch die homogenen Elemente von $A_0[X]$, repräsentiert werden; - es gelten jedoch neben den in $A_0[X]$ gültigen Relationen noch die Relationen $1 \otimes X = X$ und $X \otimes 1 = X$, sowie deren Folgerelationen. Daher lassen sich in $A_1[X]$ die direkten Summanden der Untermoduln M_n durch einen einzigen repräsentieren. Man kann nämlich beispielsweise für das Element $x + ax + xb + cxd$ schreiben

$1x1 + ax1 + 1xb + cxd$; -d.h. Repräsentanten von

$M_1 = RX \oplus A \otimes RX \oplus RX \otimes A \oplus A \otimes RX \otimes A$ können schon in

$A \otimes RX \otimes A$ alleine gewählt werden. Es ist aber nicht ohne

weiteres klar, daß diese Repräsentanten eindeutig sind.

In der Tat sind sie eindeutig, jedoch ist dies nicht direkt zu beweisen. Wir benutzen vielmehr die Vermutung, daß die Repräsentanten eindeutig sind (und die Isomorphie

$A \otimes_R R X \otimes_R A \cong A \otimes_R A$), um ein universelles Objekt in $C_1(A, \{1\})$ durch Angabe der Graduierung zu konstruieren. Wir schicken der Konstruktion einige Bemerkungen über balancierte Tensorprodukte voraus. Für eine ausführliche Darstellung verweisen wir auf Bourbaki, *Algebre multilinéaire*, Appendix II.

Sei M ein A -Rechtsmodul und N ein A -Linksmodul über einem nicht notwendig kommutativen Ring A mit Eins (Für kommutatives A ist die Unterscheidung Linksmodul-Rechtsmodul überflüssig).

Sei weiter G eine abelsche Gruppe und

$$\beta : M \times N \longrightarrow G$$

eine biadditive Abbildung mit

$$\beta (ma, n) = \beta (m, an)$$

für alle $m \in M$, $n \in N$ und $a \in A$. Eine solche Abbildung heißt balanciert. Das balancierte Tensorprodukt $M \otimes_A N$ von M und N , ist die abelsche Gruppe, die alle balancierten Abbildungen in irgendeine abelsche Gruppe über eine additive Abbildung $\tilde{\beta}$ faktorisiert. Also

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\quad \kappa \quad} & M \otimes_A N \\ & \searrow \beta & \swarrow \tilde{\beta} \\ & G & \end{array}$$

ist kommutativ. Falls A kommutativ ist, besitzt $M \otimes_A N$ eine natürliche A -Modulstruktur, die durch die Zuordnung $a \longrightarrow \tilde{a}$ definiert ist, wobei

$$\tilde{a} (m \otimes n) := m \otimes an$$

gesetzt wird.

Für diese A -Modulstruktur auf $M \otimes_A N$ ist $\times$ A -bilinear und der A -Modul $M \otimes_A N$ faktorisiert alle A -bilinearen Abbildungen.

Ebenso ist das balancierte Tensorprodukt $M \otimes_A N$ ein C -Modul für jeden zentralen Teilring von A und $\times$ ist C -bilinear.

Konstruktion: Sei A eine R -Algebra mit Eins. Dann setzen wir für jedes $n \in \mathbb{N}$: $T_n := \bigotimes_R^{n+1} A$

Die R -Moduln T_n tragen eine natürliche A -Bimodulstruktur, die sich wie folgt beschreiben läßt:

Jedes $a \in A$ definiert durch Linksmultiplikation L_a und durch Rechtsmultiplikation R_a eine R -lineare Abbildung von A in sich. Diese Abbildungen setzen sich (für $n > 0$) fort zu R -linearen Abbildungen

$$L_a \otimes \bigotimes^{n-1} \text{Id}_A \quad \text{bzw.} \quad \bigotimes^{n-1} \text{Id}_A \otimes R_a$$

von T_n in sich. Die Zuordnung

$$a \longrightarrow L_a \otimes \bigotimes^{n-1} \text{Id}_A \quad \text{bzw.} \quad a \longrightarrow \bigotimes^{n-1} \text{Id}_A \otimes R_a$$

ist ein R -Algebren-Homomorphismus bzw. Antihomomorphismus von A in $\text{End}_R(T_n)$, womit eine A -Bimodulstruktur auf den Moduln T_n erklärt ist. Wir bilden nun den R -Modul

$$E(A) := \bigoplus_{n=0} T_n$$

und erklären eine Multiplikation auf $E(A)$, indem wir auf den direkten Summanden T_n die Multiplikation als das balancierte Tensorprodukt $T_n \otimes_A T_m$ erklären. Also:

$$t_n t_m := t_n \otimes_A t_m \quad \text{für} \quad t_n \in T_n, t_m \in T_m.$$

Diese Zuordnung ist R -bilinear, da A eine R -Algebra ist, und assoziativ. Weiter gilt

$$T_n \otimes_A T_m \cong T_{n+m}$$

da $A \otimes_A A \cong A$ ist unter der Zuordnung $a \otimes_A b \rightarrow ab$, und $(X \otimes_R Y) \otimes_A Z \cong X \otimes_R (Y \otimes_A Z)$.

Satz 1: Sei A eine R -Algebra mit Eins. Dann gilt

$$A_1[X] \cong E(A)$$

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß $E(A)$ ein Objekt aus der Kategorie $C(A, \{1\})$ ist und in dieser Kategorie die universelle Abbildungseigenschaft besitzt.

1) Wir zeigen zunächst, daß $E(A)$ in $C(A, \{1\})$ liegt. Man setze $X := 1 \otimes_R 1$ und betrachte das Paar

$$\langle A, X \rangle \text{ mit } \langle \underline{A}, X \rangle = E(A). \text{ Natürlich gilt } \langle \underline{A}, X \rangle \in E(A).$$

Wir behaupten: $\langle A, X \rangle = E(A)$. Sei nämlich

$$a_0 \otimes_R a_1 \otimes_R a_2 \otimes \dots \otimes_R a_n \in T_n$$

dann läßt sich dieses Element auf in der Form

$$a_0 \otimes_A (1 \otimes_R 1) \otimes_A a_1 \otimes_A (1 \otimes_R 1) \otimes \dots \otimes_A a_n$$

schreiben; liegt also in $\langle \underline{A}, X \rangle$. Natürlich ist $\langle \underline{A}, X \rangle$

eine unitäre Erweiterung von A , denn es gilt

$$1 \otimes_A (a_0 \otimes_R a_1 \otimes \dots \otimes_R a_n) = a_0 \otimes_R a_1 \otimes \dots \otimes_R a_n$$

und

$$(a_0 \otimes_R a_1 \otimes \dots \otimes_R a_n) \otimes_A 1 = a_0 \otimes_R a_1 \otimes \dots \otimes_R a_n.$$

2) $\langle A, X \rangle$ hat die universelle Abbildungseigenschaft in der Kategorie $C(A, \{1\})$. Sei nämlich $\langle A, x, \{1\} \rangle =: \langle A, x \rangle \in C(A, \{1\})$, dann besteht $\langle \underline{A}, x \rangle$ aus den Elementen

$$A + \left\{ \sum_n \sum_s a_0^s x a_1^s x \dots x a_n^s : a_v^s \in A \right\};$$

denn diese Menge ist additiv, multiplikativ und unter Skalarenmultiplikation abgeschlossen, und enthält A und x . Wir konstruieren nun einen Homomorphismus von $E(A)$ auf $\langle \underline{A}, x \rangle$.

Da $T_0 = A$ ist setzen wir $\phi_0 := \text{Id}_A$

Für jedes $n \geq 0$ definiert nun $x \in \langle \underline{A}, x \rangle$ eine $(n+1)$ -fach multilineare Abbildung

$$\phi'_n(a_0, a_1, \dots, a_n) := a_0 x a_1 x \dots x a_n$$

von $\prod^n A \longrightarrow \langle \underline{A}, x \rangle$. Nun läßt sich jede $(n+1)$ -fach bzgl.

R multilineare Abbildung von $\prod^{n+1} A$ in irgendeinen R -Modul durch eine R -lineare Abbildung über $\otimes_R^{n+1} A$ faktorisieren.

Man hat daher eine eindeutig bestimmte Abbildung ϕ_n so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \prod^{n+1} A & \xrightarrow{\quad} & \otimes_R^{n+1} A \\ & \searrow \phi'_n & \swarrow \phi_n \\ & \langle \underline{A}, x \rangle & \end{array}$$

kommutativ ist.

Die Familie $(\phi_n)_n \in \mathbb{N}$ von R -linearen Abbildungen setzt sich fort zu einer R -linearen Abbildung ϕ von der direkten Summe $E(A) = \bigoplus T_n$ in $\langle \underline{A}, x \rangle$. Nach Definition ist ϕ die Identität auf A und es gilt:

$$\phi(1) = \phi_0(1) = 1 \quad \text{und}$$

$$\phi(x) = \phi_1(1 \otimes_R 1) = \phi_1(1, 1) = 1x1 = x.$$

Daher ist ϕ ein Morphismus in der Kategorie $C(A, \{1\})$, wenn wir noch nachweisen, daß ϕ multiplikativ ist. Dazu genügt es die Multiplikativität auf einem Erzeugenden-

system von $E(A)$ nachzuweisen. Sei also

$$\begin{aligned} t_n &= a_0 \otimes_R a_1 \otimes \dots \otimes_R a_n \in T_n & \text{und} \\ t_m &= b_0 \otimes_R b_1 \otimes \dots \otimes_R b_m \in T_m & \text{gegeben.} \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \phi(a_0 \otimes_R a_1 \dots \otimes_R a_n) \phi(b_0 \otimes_R b_1 \dots \otimes_R b_m) &= \\ = a_0 \times a_1 \times \dots \times a_n \times b_0 \times b_1 \times \dots \times b_m &\text{ und} \\ \phi[(a_0 \otimes_R a_1 \otimes \dots \otimes_R a_n) \otimes_A (b_0 \otimes_R b_1 \otimes \dots \otimes_R b_m)] &= \\ = a_0 \times a_1 \dots \times a_n \times b_0 \times \dots \times b_m. & \end{aligned}$$

$$\text{D.h. aber } \phi(t_n \otimes_A t_m) = \phi(t_n) \phi(t_m).$$

Mit Hilfe dieses Darstellungssatzes zeigen wir nun, daß die Polynom-Erweiterung $A_1[X]$ nullteilerfrei ist, falls A eine nullteilerfreie K -Algebra über einem Körper K ist. Dabei nennen wir ganz allgemein eine R -Algebra A über einem Ring R nullteilerfrei, wenn A als Ring nullteilerfrei ist.

Lemma 1: Sei A eine nullteilerfreie K -Algebra mit Eins über einem Körper K . Dann ist die Polynom-Erweiterung $A_1[X]$ nullteilerfrei.

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß das Produkt von Null verschiedener homogener Elemente von Null verschieden ist. Denn seien g und f irgendwelche Elemente, so betrachte man ihre homogenen Komponenten vom höchsten Grad. Seien also $t_n \in T_n$ und $t_m \in T_m$ gegeben, - beide von Null verschieden. Wir haben dann zu zeigen, daß ihr Produkt ein von Null verschiedenes Element in $T_n \otimes_A T_m = \bigotimes_K^{n+1} A \otimes_A \bigotimes_K^{m+1} A$ ist.

Da A ein K -Vektorraum ist, haben die K -Moduln $\bigotimes_K^n A$ und $\bigotimes_K^m A$ Basen; - etwa $(e_s)_{s \in S}$ und $(f_t)_{t \in T}$; also

$$\bigotimes_K^n A = \bigoplus_{s \in S} K e_s \quad \text{und} \quad \bigotimes_K^m A = \bigoplus_{t \in T} K f_t.$$

Weiter gilt:

$$A_s := K e_s \otimes_K A \cong A \quad \text{und} \quad A_t := A \otimes_K K f_t \cong A$$

Damit ist

$$T_n \cong \bigoplus_{s \in S} A_s \quad \text{und} \quad T_m \cong \bigoplus_{t \in T} A_t.$$

und die durch die Isomorphismen $A_s \cong A$ und $A_t \cong A$ auf die direkten Summen übertragene A -Rechtsmodulstruktur bzw.

A -Linksmodulstruktur stimmt mit der entsprechenden A -Modulstruktur von T_n bzw. T_m überein. Wir erhalten daher

$$T_n \otimes_A T_m = \bigoplus_{(s,t) \in S \times T} A_s \otimes_A A_t = \bigoplus_{s,t} A_{st} \quad \text{wobei} \\ A_{st} := A_s \otimes_A A_t \cong A \otimes_A A \cong A \text{ ist.}$$

Da nach Voraussetzung die Elemente t_n und t_m ungleich Null waren, ist unter Ausnutzung der Isomorphismen zu den direkten Summen wenigstens eine der S - bzw. T -Komponenten von Null verschieden. Da weiter die Isomorphie $A \otimes_A A$ durch die Zuordnung $a \otimes_A b \mapsto ab$ vermittelt wird und A nullteilerfrei ist folgt, daß $t_n \otimes_A t_m$ von Null verschieden ist.

Um die Aussage von [9], daß $A_1[X]$ nullteilerfrei ist, falls A ein Körper ist und A die $\mathbb{Z}$ -Algebra A , haben wir das Lemma 1 auf Algebren über Ringen (zumindest aber über dem Ring $\mathbb{Z}$) zu übertragen. Dazu benötigen wir einige Vorbemerkungen.

Bemerkung 1: Sei A eine R -Algebra mit Eins. Dann ist die R -Algebrenstruktur von A durch die Angabe der Ringstruktur von A und den Struktur-Homomorphismus $R \longrightarrow \text{Zentrum}(A)$, der durch $r \longrightarrow r \cdot 1_A$ erklärt ist, beschrieben. Die R -Algebra A ist auf natürliche Weise eine R/α -Algebra, wobei α der Kern des Strukturhomomorphismus; d.h. der Annulator von A in R , ist. Der Ring R/α kann nun mit einem zentralen Teilring von A identifiziert werden. Falls A nullteilerfrei ist, muß α ein Primideal in R sein. Weiter gilt

$$\otimes_R^n A \cong \otimes_{R/\alpha}^n A$$

Das heißt aber: die R -Modulstruktur von A und $\otimes^n A$, und daher auch die R -Algebrenstruktur von $E(A)$ sind durch die R/α -Modulstruktur von A , und den kanonischen Restklassen-Homomorphismus $R \longrightarrow R/\alpha$ bestimmt. Mit diesen Betrachtungen erhalten wir

Lemma 2: Sei A eine nullteilerfreie R -Algebra mit Eins, deren Annulator $\text{ann}_R(A)$ ein maximales Ideal ist. Dann ist $A_1[X]$ nullteilerfrei.

Da in einem Hauptidealring jedes von Null verschiedene Primideal maximal ist, folgt weiter

Corollar 1: Sei A eine nullteilerfreie R -Algebra mit Eins über einem Hauptidealring, deren Annulator $\text{ann}_R(A)$ von Null verschieden ist. Dann ist $A_1[X]$ nullteilerfrei.

Bemerkung 2: Sei A eine nullteilerfreie R -Algebra mit Eins und es sei $\text{ann}_R(A) = 0$. Dann kann R mit einem zentralen

Teilring von A identifiziert werden. Wir führen nun diesen Fall durch "Lokalisierung" auf den Fall von Lemma 1 zurück. Sei $S := R \setminus \{0\}$. Dann ist S multiplikativ abgeschlossen, da R ein Teilring von A ist. Die Lokalisierung A_S von A in S ist nun erklärt als die Menge aller Paare $\{(a,s) : a \in A, s \in S\}$ modulo der Äquivalenzrelation

$$(a,r) \sim (b,s) :\Leftrightarrow \text{es existiert ein } t \in S, \text{ so daß} \\ t(sa - rb) = 0 \text{ ist.}$$

($S \subset \text{Zentrum}(A)$!) Da A nullteilerfrei ist könnte die Äquivalenzrelation hier auch durch $(a,r) \sim (b,s) :\Leftrightarrow sa = rb$ beschrieben werden. Wir haben darauf verzichtet, da wir später auch R -Moduln zu lokalisieren haben, für die R -Torsion vorliegen kann.

Addition, Multiplikation und R -Modulstruktur von A_S sind wie folgt erklärt:

$$\begin{aligned} (a,s) + (b,t) &:= (ta + sb, st) \\ (a,s)(b,t) &:= (ab, st) \\ r(a,s) &:= (ra, s) \end{aligned}$$

Dadurch ist auf A_S eine R -Algebrenstruktur erklärt.

A_S ist nullteilerfrei, und die Zuordnung $a \mapsto (a,1)$ ist ein injektiver R -Algebren-Homomorphismus von A in A_S . Die Injektivität folgt aus: $(a,1) \sim (0,s) \Leftrightarrow sa = 0$.

Damit haben wir die nullteilerfreie R -Algebra A in eine nullteilerfreie K -Algebra eingebettet. Denn A_S enthält den Körper $K := R_S$ der Brüche von R .

Natürlich liefert die Einbettung $\varepsilon : a \mapsto (a,1)$ R -lineare

Abbildungen $\otimes^n \varepsilon : \otimes_R^n A \longrightarrow \otimes_R^n A_S$ und daher eine R -lineare Abbildung

$$\tilde{\varepsilon} : E(A) = \otimes_R^n A \longrightarrow \otimes_R^n A_S =: E(A_S)$$

$\tilde{\varepsilon}$ ist sogar ein Algebren-Homomorphismus, denn es gilt nach Bourbaki [2], Seite 97 für R -Moduln M und N über einem kommutativen Ring R

$$M_S \otimes_R N_S \cong M_S \otimes_{R_S} N_S$$

und entsprechend für balancierte Tensorprodukte

$$M_S \otimes_A N_S \cong M_S \otimes_{A_S} N_S$$

Wenn $\tilde{\varepsilon}$ also injektiv ist, haben wir die R -Algebra $A_1[X]$ in die nach Lemma 1 nullteilerfreie K -Algebra $(A_S)_1[X]$ eingebettet. Eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür, daß $\tilde{\varepsilon}$ injektiv ist, ist nach Bourbaki ([2], Seite 82) die Bedingung: $\otimes_R^n A$ ist R -torsionsfrei.

Andererseits ist (unter der anfangs gemachten Voraussetzung $\text{ann}_R(A) = 0$) $\otimes_R^n A$ R -torsionsfrei, wenn $A_1[X]$ nullteilerfrei ist.

Wir erhalten daher, wenn wir die Betrachtungen von Bemerkung 1 und 2 zusammenfassen, den

Satz 2: Sei A eine nullteilerfreie R -Algebra mit Eins und $\mathfrak{A}$ der Annulator von A in R . Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

- (a) $A_1[X]$ ist nullteilerfrei
- (b) Für jedes natürliche $n > 1$ ist $\otimes_R^n A$ $(R/\mathfrak{A})$ -torsionsfrei.

Da nach Bourbaki [2], Seite 32 das Tensorprodukt flacher

R-Moduln flach ist, und nach [2], Seite 29 für jeden Nicht-Nullteiler r von R gilt: $rx = 0 \implies x = 0$, wenn x ein Element eines flachen Moduls ist, haben wir den

Satz 3: Sei A eine nullteilerfreie R -Algebra mit Eins, die als $R/\mathfrak{a}$ -Modul (wobei $\mathfrak{a} = \text{ann}_R(A)$ ist) flach ist, so ist $A_1[X]$ nullteilerfrei.

Da ebenfalls nach [2], Seite 29 ein R -torsionsfreier R -Modul über einem Ring, in dem jedes endlich erzeugte Ideal Hauptideal ist, ein flacher Modul ist, erhalten wir unter Verwendung von Corollar 1

Satz 4: Sei A eine nullteilerfreie R -Algebra mit Eins über einem Hauptidealring. Dann ist $A_1[X]$ nullteilerfrei.

Daß die Bedingung "flach" nicht überflüssig ist, zeigt folgendes Beispiel, das mir Herr Dr. Geyer mitgeteilt hat: Sei $A := \mathbb{Z}[i]$ und $R := \mathbb{Z}[2i]$. Dann hat $A \otimes_R A$ R -Torsion. Dazu betrachte man das Element $i \otimes 1 - 1 \otimes i$ von $A \otimes_R A$. Sicher ist $2(i \otimes 1 - 1 \otimes i)$ in $A \otimes_R A$ gleich Null. Man überlegt sich aber, daß $i \otimes 1 - 1 \otimes i$ in $A \otimes_R A$ von Null verschieden ist.

Die Verallgemeinerung der Sätze 3 und 4 auf n Variable folgt aus der Tatsache, daß die Isomorphie

$$A_1[X_1, X_2] \cong (A_1[X_1])_1[X_2] \quad \text{besteht.}$$

Daher gilt: $A[X_1, X_2] \cong \bigoplus_{n=0}^{\infty} \otimes_R^n E(A).$

Nun ist aber $\bigotimes_R^n (\bigoplus_R^m A)$ direkte Summe von Tensorprodukten vom Typ $\bigotimes_R^s A$.

Wenn nun $A_1[X]$ nullteilerfrei ist, so sind nach Satz 2 sämtliche Moduln $\otimes_R^S A$ R/G_1 -torsionsfrei, und daher auch die graduierten Moduln von $(A_1[X_1])_1[X_2]$. Durch Induktion erhält man die allgemeinen Resultate.

Wir haben somit insbesondere die Aussage von [9], daß $A_1[X_1, \dots, X_n]$ nullteilerfrei ist, wenn A ein Körper ist und A als $\mathbb{Z}$ -Algebra angesehen wird, bewiesen.

Abschließend sei bemerkt, daß sämtliche Sätze dieses Anhangs auch für die Polynom-Erweiterung $A_S[X]$ formuliert und bewiesen werden können; denn $A_S[X]$ kann als R' -Algebra angesehen werden, wobei R' der kommutative Polynomring in genügend vielen Variablen über dem Ring R ist. Genügend viele heißt dabei so viele Variable, wie Erzeugende nötig sind, um das Zentrum von A über dem Bild von R in A zu erzeugen.

L i t e r a t u r v e r z e i c h n i s

- [1] N. Bourbaki, Livre III, Topologie générale,
Chap. 3, Hermann, Paris 1960.
- [2] N. Bourbaki, Algèbre Commutative, Chap.1-2,
Modules plats et Localisation,
Paris 1961.
- [3] C. Chevalley, Fundamental Concepts of Algebra,
Academic Press, New York 1956.
- [4] P.M. Cohn, Factorization in non-commutative
power series ring. Proc. Cambridge
Phil. Soc. 452 - 464, (1962).
- [5] W. Eichhorn, Funktionstheorie in Algebren über
dem reellen Zahlkörper und ihre
Anwendung auf partielle Differential-
gleichung, Dissertation, Würzburg 1961.
- [6] N. Jacobson, Structures of Rings, AMS, Providence
1964.
- [7] I. Kaplansky, An Introduction to Differential
Algebra, Hermann, Paris 1957.
- [8] B. Mitchell, Theory of Categories, Academic Press,
New York - London 1965.
- [9] E. Noether- Moduln in nichtkommutativen Polynom-
W. Schmeidler, bereichen, insbesondere aus Diffe-
rential- und Differenzenausdrücken,
M.Z. 8, 1 - 35, (1920).
- [10] O. Ore, Theory of non-commutative polynomials,
Ann. of Math. vol. 2, 480 - 508, (1933).
- [11] F. Schwarz, Reduzibilitätssätze in nichtkommuta-
tiven Polynomringen, Dissertation,
Würzburg 1965.
- [12] Centro Internazionale Matematico Estivo, Some Aspects
of Ring-Theory, Roma 1966, Seite 1 - 45 (Amitsur).

L e b e n s l a u f

Am 8.11.1939 wurde ich als Sohn des Studienrates Dr. Heinrich Hain und seiner Ehefrau Luise, geb. Lindemann, in Sonneberg geboren. Aufgewachsen bin ich bei meinem Großvater Adam Lindemann in Nürnberg, da meine Mutter bei meiner Geburt starb und mein Vater 1942 in Rußland gefallen ist.

- 1946-50 Besuch der Volksschule in Nürnberg
- 1950-59 Besuch des Realgymnasiums in Nürnberg
- 1959 Abitur
- 1959-68 Studium der Mathematik an der Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
- 1964 Diplom-Vorprüfung im Fach Mathematik
- 1968 Diplom-Hauptprüfung für Mathematik

Vom 1.4.1968 bis zum 31.1.1970 war ich Verwalter einer Assistentenstelle am Mathematischen Institut der TU Clausthal und seit 1.2.1970 Verwalter einer Assistentenstelle am Mathematischen Institut der Universität Erlangen-Nürnberg.

Am 23.12.1970 habe ich meine Frau Gabriele (geb. Wüst) geheiratet.

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 8520 Erlangen, Hauptstr. 109 (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990
